Klausur zur Vorlesung Analysis 2

Bitte lesen Sie dieses Blatt sorgfältig durch und füllen Sie dieses Deckblatt in deutlicher Blockschrift vollständig aus. Bitte verwenden Sie für die gesamte Klausur **keinen Bleistift**.

Zur Lösung der Aufgaben sind **keine Hilfsmittel** wie etwa Unterlagen, Taschenrechner oder Mobiltelefone erlaubt. Rucksäcke oder Taschen müssen während der Klausur verschlossen bleiben. Bei Verstößen gegen diese Regeln wird die Klausur mit 0 Punkten gewertet. Gleiches gilt für Studierende, die von anderen Teilnehmern abschreiben oder das Abschreiben ermöglichen.

Die Lösung einer jeden Aufgabe ist auf dem jeweiligen Blatt niederzuschreiben. Es darf **kein eigenes Papier** verwendet werden. Sollte der vorgesehene Platz zur Aufschrift Ihrer Lösung nicht ausreichen, so kann ein weiteres, mit Namen und Aufgabennummer zu versehendes Blatt bei den Aufsichtspersonen geordert werden. Dieses muss dann bei Abgabe der Klausur an die entsprechende Stelle eingeheftet werden. Für Nebenrechnungen und Konzepte wird Ihnen auf Wunsch Papier ausgehändigt. Diese werden ebenfalls **bei der Abgabe eingeheftet**.

Die maximal erreichbare Gesamtpunktzahl pro Aufgabe variiert. Die erreichbare Punktzahl pro Teilaufgabe entnehmen Sie der jeweiligen Aufgabenstellung. Es gibt **insgesamt 9 Aufgaben**. Für das Bestehen der Klausur ist das Erreichen der Hälfte der Maximalpunktzahl, d.h. mindestens 20 Punkte, hinreichend.

Name:	Vorname:
Geburtsort:	Geburtsdatum:

Matrikelnummer:	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum$
maximale Punktzahl	10	4	3	3	4	5	5	3	3	40
erreichte Punktzahl										

Note:

Aufgabe 1 (2 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

Geben Sie kurze, präzise Antworten ohne Begründungen auf die folgenden Fragen.

(1) Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Wie ist eine Norm $\|\cdot\|$ auf X definiert?

(2) Wie lautet die Definition einer folgenkompakten Menge $M \subset \mathbb{R}^n$?

(3) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wann heißt eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}^n$ regulär in D?

(4) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Wie ist die Exponentialmatrix e^A definiert?

(5) Definieren Sie das äußere Lebesgue-Maß einer Menge $M \subset \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass (M, d) mit $M := (0, \infty) \subset \mathbb{R}$ sowie $d(x, y) := |\ln(x/y)|$ für alle $x, y > 0$ ein vollständiger metrischer Raum ist.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Gegeben sei die Menge $M := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ sowie die Funktion

$$f : M \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right).$$

Untersuchen Sie, ob die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt sind und bestimmen Sie gegebenenfalls den Fixpunkt von f in (M, d) mit $d(x, y) := |x - y|$ für alle $x, y \in M$.

Aufgabe 4 (1+2 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x)\sin(y)}{x^2+y^2} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Ist f stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Untersuchen Sie f auf partielle Differenzierbarkeit. Ist f auch total differenzierbar?

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x - y$ auf der Menge

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Aufgabe 6 (1 + 3 + 1 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \exp(x)\cos(y) \\ \exp(x)\sin(y) \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Determinante der Abbildung f.

(b) Prüfen Sie, in welchen Punkten f lokal umkehrbar ist. Welche Beziehung besteht zwischen der Jacobi-Matrix der Funktion f sowie ihrer lokalen Umkehrfunktion?

(c) Besitzt die Funktion f eine auf ganz $\mathbb{R}^2$ definierte Umkehrfunktion? Begründen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 7 (1 + 3 + 1 Punkte)

Betrachten Sie zu festen reellen Werten $K > 0$ sowie $u_0 \in [0, K]$ die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u'(t) &= u(t)(K - u(t)) \quad \text{für} \quad t \geq 0, \\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

(a) Untersuchen Sie, ob die Anfangswertaufgabe eine eindeutige lokale Lösung besitzt.

(b) Bestimmen Sie die Lösung des obigen Anfangswertproblems in Abhängigkeit von u_0.

(c) Ist der stationäre Punkt $\overline{u} = 0$ asymptotisch stabil (im Sinne von Lyapunov)?

Aufgabe 8 (2 + 1 Punkte)

Gegeben seien die reellwertigen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \Phi(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1+2t & -t \\ 4t & 1-2t \end{pmatrix} \quad \forall\, t \geq 0.$$

(a) Ist Φ ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung $u' = Au$ für $t \geq 0$?

(b) Bestimmen Sie alle stationären Punkte $\overline{u} \in \mathbb{R}^2$ der Differentialgleichung $u' = Au$ und untersuchen Sie deren Stabilität (im Sinne von Lyapunov).

Aufgabe 9 (3 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei f auf jedem kompakten Teilintervall $[a, x]$ von $[a, b)$ Lebesgue-integrierbar. Beweisen Sie, dass f Lebesgue-integrierbar auf $[a, b)$ ist, falls das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_a^b |f(x)|\, \mathrm{d}x := \lim_{x \to b} \int_a^x |f(x)|\, \mathrm{d}x$$

existiert.