Analysis 2 - Übungsblatt 0

Sommersemester 2017

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Jan-Erik Busse, Chris Kowall

Internetseite: `http://www.biostruct.uni-hd.de/Analysis2.php`

Abgabe: keine, nicht bewertetes Präsenzübungsblatt

Aufgabe 0.1

(a) Sei $f : \mathbb{R}_+ := [0, \infty) \to \mathbb{R}_+$ eine stetige, monoton fallende Funktion. Zeigen Sie die Äquivalenz

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x < \infty \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{k=0}^\infty f(k) < \infty.$$

(b) Gegeben sei die Gamma-Funktion $\Gamma : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ durch

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

(i) Zeigen Sie, dass $\Gamma(x)$ für $x > 0$ wohldefiniert ist.

(ii) Beweisen Sie für alle $x > 0$ die Identität $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ sowie $\Gamma(1) = 1$.

Rekapitulieren Sie dabei die Begriffe des uneigentlichen Riemann-Integrals sowie der Fakultät einer natürlichen Zahl.

Aufgabe 0.2

Betrachten Sie für $p \in \mathbb{R}, p \geq 1$ die Menge ℓ^p der zur p-ten Potenz absolut summierbaren reellen Folgen $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d.h.

$$\ell^p := \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_n \in \mathbb{R} \mid \|x\|_p < \infty\} \quad \text{mit} \quad \|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p\right)^{1/p}.$$

(a) Machen Sie sich klar, dass ℓ^p für $p \geq 1$ mit der natürlichen Addition und skalaren Multiplikation

$$x + y := (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{und} \quad \alpha x := (\alpha x_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \forall\, x, y \in \ell^p, \alpha \in \mathbb{R}$$

ein $\mathbb{R}$-Vektorraum bildet. Zeigen Sie dazu zunächst die Konvexität der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \quad a \mapsto |a|^p.$$

(b) Betrachten Sie die natürliche Logarithmus-Funktion ln auf $\mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie, dass sie strikt konkav ist und folgern Sie die Young-Ungleichung für $p > 1$:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R}_+ \quad \text{mit} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

(c) Beweisen Sie die Hölder-Ungleichung für $p > 1, q = p/(p-1)$, d.h.

$$\sum_{k=1}^\infty |x_k y_k| \leq \|x\|_p \|y\|_q \qquad \forall\, x \in \ell^p, y \in \ell^q.$$

(d) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_p$ eine Norm auf ℓ^p induziert für alle $p \geq 1$.