Analysis 2 - Übungsblatt 10

Sommersemester 2017

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Jan-Erik Busse, Chris Kowall

Internetseite: `http://www.biostruct.uni-hd.de/Analysis2.php`

Abgabe: 30. Juni, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 10.1 4 Punkte

Für $k, n \in \mathbb{N}$ und $k \leq n$ seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ die k verschiedenen Eigenwerte der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die zugehörige Jordan-Normalform mit entsprechenden Jordan-Blöcken $J_1, \ldots, J_k$, d.h.

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad (J_\ell)_{ij} = \begin{cases} \lambda_\ell & \text{für} \quad j = i, \\ 1 & \text{für} \quad j = i+1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für} \quad \ell = 1, \ldots, k.$$

(a) Zeigen Sie die Identität

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{J_k t} \end{pmatrix}.$$

(b) Gelte $\mathrm{Re}(\lambda_i) < \alpha$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass die Fundamentalmatrix e^{At} der Differentialgleichung

$$u'(t) = Au(t) \quad \text{für} \quad t \geq 0$$

der Abschätzung

$$\left\| e^{At} u_0 \right\| \leq C \|u_0\| e^{\alpha t} \qquad \forall\, t \geq 0, u_0 \in \mathbb{R}^n$$

mit einer Konstanten $C > 0$ genügt.

(c) Zeigen Sie mit einem Gegenbeispiel, dass eine Abschätzung wie unter (a) im Allgemeinen nicht für $\mathrm{Re}(\lambda_i) \leq \alpha$ gilt.

Aufgabe 10.2 4 Punkte

Betrachten Sie für den reellen Parameter $\omega > 0$ die nichtlineare Gleichung des mathematischen Pendels

$$u''(t) = -\omega^2 \sin(u(t)) \qquad \text{für} \quad t \geq 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass Lösungen u global auf ganz $\mathbb{R}_+$ existieren und eindeutig durch entsprechende Anfangswerte gegeben sind.

(b) Bestimmen Sie das äquivalente System 1. Ordnung der obigen Differentialgleichung und dessen stationäre Punkte $\overline{u}$. Geben Sie außerdem die Linearisierung an den jeweiligen Gleichgewichtspunkten an.

(c) Prüfen Sie die stationären Punkte $\overline{u}$ auf Stabilität (im Sinne von Lyapunov).

Hinweis. Sie können Aufgabe 10.3 verwenden.

Bitte wenden!

Aufgabe 10.3 4 Punkte

Gegeben sei $n \in \mathbb{N}$ und die global lösbare autonome Differentialgleichung

$$u'(t) = f(u(t)) \qquad \text{für} \quad t \geq 0,$$

für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Des weiteren sei $\overline{u} \in \mathbb{R}^n$ ein stationärer Punkt der Differentialgleichung und $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von $\overline{u}$.
Sei die folgende Lyapunov-Funktion $V \in C^1(U, [0, \infty))$ mit $V(\overline{u}) = 0$ und $V > 0$ in $U \setminus \{\overline{u}\}$ sowie

$$\dot{V}(u) := \nabla V(u) \cdot f(u) \leq 0 \qquad \forall\, u \in U \setminus \{\overline{u}\}$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass $\overline{u}$ ein stabiler stationärer Punkt des obigen Systems ist.

Angenommen es liege eine skalare Gleichung zweiter Ordnung vor, d.h.

$$z''(t) = g(z(t)) \qquad \text{für} \quad t \geq 0,$$

welche global lösbar sei für stetiges $g \in C(\mathbb{R})$ und einen stationären Punkt $\overline{z} \in \mathbb{R}$ besitze.

(b) Betrachten Sie die Gesamtenergie aus Aufgabe 9.3 und bestimmen Sie mithilfe dieser eine geeignete Lyapunov-Funktion, falls es eine offene Umgebung $Z \subset \mathbb{R}$ von $\overline{z}$ gibt mit $(z - \overline{z})g(z) < 0$ für alle $z \in Z$.

Aufgabe 10.4 4 Punkte

Untersuchen Sie folgende Mengen auf Lebesgue-Messbarkeit sowie Jordan-Quadrierbarkeit. Begründen Sie Ihr Ergebnis.

(a) $M_1 := ([0, 1] \cap \mathbb{Q})^n \subset \mathbb{R}^n$.

(b) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Betrachten Sie den Graphen

$$M_2 := \{(x, f(x)) \mid x \in D\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Hinweis. Sie können die folgende Überdeckungseigenschaft verwenden:
Zu jeder Kantenlänge $\delta > 0$ gibt es endlich viele Würfel $W_1, \ldots, W_{m_\delta}$ mit maximaler Kantenlänge δ, welche D überdecken, d.h. es gilt

$$D \subset \bigcup_{i=1}^{m_\delta} W_i.$$