Analysis 2 - Übungsblatt 12

Sommersemester 2017

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Jan-Erik Busse, Chris Kowall

Internetseite: `http://www.biostruct.uni-hd.de/Analysis2.php`

Abgabe: 14. Juli, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 12.1 4 Punkte

Bestimmen Sie das äußere Lebesgue-Maß für die folgenden Mengen in $\mathbb{R}^2$ und prüfen Sie, ob die jeweiligen Mengen Lebesgue-messbar sind.

(a) $M_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid y \leq \mathrm{e}^{-x}\}$

(b) $M_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q}\}$

(c) $M_3 := [0, 1] \times \mathbb{R}$

Aufgabe 12.2 4 Punkte

Untersuchen Sie die unstetige Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \to [-1, 1], \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{für} \quad x > 0, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

auf uneigentliche Riemann-Integrierbarkeit sowie Lebesgue-Integrierbarkeit.

Aufgabe 12.3 4 Punkte

Für ein $n \in \mathbb{N}$ sei eine beschränkte Lebesgue-messbare Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mu(D) > 0$ gegeben sowie $f : D \to \mathbb{R}$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion.

(a) Gelte $f > 0$ fast überall in D. Zeigen Sie

$$\int_D f(x)\, \mathrm{d}x > 0.$$

(b) Beweisen Sie die Äquivalenz

$$f = 0 \text{ fast überall in } D \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_D |f(x)|\, \mathrm{d}x = 0.$$

Gilt dabei im Allgemeinen die Aussage $f = 0$ auch überall in D?

Bitte wenden!

Aufgabe 12.4 4 Punkte

Betrachten Sie die folgenden Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : D \to \mathbb{R}$ für

(i) $D = [0,1]$ sowie eine Aufzählung $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aller rationalen Zahlen in D mit

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in \{r_1, \ldots, r_n\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(ii) $D = [0,1]$ mit

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{für} \quad x \in [0, 1/n], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(iii) $D = \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/n & \text{für} \quad x \in [-n, n], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Untersuchen Sie, welcher der Konvergenzsätze von Beppo Levi, Lebesgue bzw. Fatou zur Vertauschbarkeit von Grenzprozessen anwendbar ist. Bearbeiten Sie dazu zunächst folgende Teilaufgaben:

(a) Untersuchen Sie, ob die vorliegenden Funktionen punktweise konvergieren und geben Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion an.

(b) Überprüfen Sie die Funktionenfolgen auf Lebesgue-Integrierbarkeit und bestimmen Sie die Werte

$$I_n := \int_D f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. In welchen Fällen lässt sich Integration und Limesbildung vertauschen?