Analysis 2 - Übungsblatt 4

Sommersemester 2017

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Jan-Erik Busse, Chris Kowall

Internetseite: `http://www.biostruct.uni-hd.de/Analysis2.php`

Abgabe: 19. Mai, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 4.1 4 Punkte

Seien $\mathbb{K}$ der Körper der reellen oder komplexen Zahlen und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Eine Reihe in einem Banachraum $(X, \|\cdot\|)$ heißt absolut konvergent, falls die Reihe über die Normen der Reihenglieder konvergiert.
Beweisen Sie, dass die Cauchysche Produktformel

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell \qquad \text{mit} \quad c_\ell = \sum_{k=0}^{\ell} a_k b_{\ell-k}$$

für zwei absolut konvergente Reihen mit Reihengliedern $a_k, b_k \in X$ gilt und die Reihe mit den Gliedern c_ℓ absolut konvergiert.
Hinweis: Lemma 3.8 im Rannacher Skript Analysis 1.

(b) Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $AB = BA$. Beweisen Sie die Identität

$$\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B. \tag{1}$$

Hinweis: Machen Sie sich klar, dass der Binomialsatz auch in einem kommutativen Ring mit Eins gilt.

(c) Finden Sie Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, für welche die Aussage (1) nicht gilt.

Aufgabe 4.2 4 Punkte

Betrachten Sie die durch

$$u = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2), \quad v = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{für} \quad x \neq 0, \\ \mathrm{sgn}(y) \cdot \frac{\pi}{2} & \text{für} \quad y \neq 0, x = 0 \end{cases}$$

definierte Abbildung Ψ der Menge $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq \mathrm{e}^2, x \leq 0\}$ nach $\mathbb{R}^2$.

(a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix und -Determinante dieser Abbildung Ψ und entscheiden Sie, auf welcher offenen Teilmenge von M die Abbildung regulär ist.

(b) Bestimmen Sie den Bildbereich und prüfen Sie, ob $\Psi : M \to \Psi(M)$ bijektiv ist. Geben Sie gegebenenfalls die zugehörige inverse Abbildung an.

Bitte wenden!

Aufgabe 4.3 4 Punkte

In manchen Fällen ist es günstig Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ nicht in kartesischen Koordinaten zu betrachten sondern beispielsweise in Kugelkoordinaten. Betrachten Sie die zugehörige Variablentransformation

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi, \theta) := \begin{pmatrix} r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

mit dem Radius $r = \|x\|_2 \geq 0$, dem Winkel $\theta \in [0, \pi]$ zwischen dem Ortsvektor x und der positiven x_3-Achse sowie $\varphi \in [0, 2\pi)$ zwischen dem auf die x_1x_2-Ebene projezierten Ortsvektor x und der positiven x_1-Achse gemessen.

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix J_Φ der (mehrdeutigen) Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sowie deren Jacobi-Determinante. In welchen Punkten $(r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3$ ist J_Φ regulär, d.h. invertierbar?

(b) Wie können Urbild- und Bildbereich der Abbildung Φ größtmöglich gewählt werden, damit Φ eine bijektive Funktion ist? Prüfen Sie dabei die Umkehrbarkeit mithilfe des Satzes über die Umkehrabbildung.

Aufgabe 4.4 4 Punkte

Betrachten Sie für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \|Ax\|_2^2$.

(a) Zeigen Sie, dass f unter der Nebenbedingung $\|x\|_2^2 = 1$ ein Maximum besitzt mit

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|_2^2=1} f(x) = \max\{\lambda \mid \lambda \text{ ist Eigenwert von } A^TA\},$$

wobei A^T die transponierte Matrix von A darstellt.

(b) Folgern Sie für die induzierte Matrixnorm

$$\|A\|_2 = \max\{\lambda^{1/2} \mid \lambda \text{ ist Eigenwert von } A^TA\}.$$