Analysis 2 - Übungsblatt 5

Sommersemester 2017

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Jan-Erik Busse, Chris Kowall

Internetseite: `http://www.biostruct.uni-hd.de/Analysis2.php`

Abgabe: 26. Mai, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 5.1 4 Punkte

Seien $\mathbb{K}$ der Körper der reellen oder komplexen Zahlen und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Seien $A, S, J \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und S eine invertierbare Matrix mit $A = SJS^{-1}$. Zeigen Sie

$$\mathrm{e}^A = S\mathrm{e}^J S^{-1}.$$

(b) Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ die Einträge einer Diagonalmatrix D, d.h. $D_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$. Beweisen Sie

$$\left(\mathrm{e}^D\right)_{ij} = \mathrm{e}^{\lambda_i}\delta_{ij}$$

mit dem Kronecker-Symbol δ_{ij} für $i, j = 1, \dots, n$.

(c) Sei $J \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ ein Jordan-Block gegeben durch eine obere Dreiecksmatrix mit den Einträgen

$$J_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad j = i+1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Exponentialmatrix e^{tJ} die Einträge

$$\left(\mathrm{e}^{tJ}\right)_{ij} = \begin{cases} \frac{t^{j-i}}{(j-i)!} & \text{für} \quad i < j, \\ 1 & \text{für} \quad i = j, \\ 0 & \text{für} \quad i > j \end{cases}$$

besitzt.

Aufgabe 5.2 4 Punkte

Minimieren Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := 6x^2 + 3y^2 - 6xy + 15x - 9y + 1$$

unter den folgenden Bedingungen:

(a) $2x + y \leq 4$.

(b) $2x + y \geq 4$.

Definition: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt positiv definit, falls für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ das Euklidsche Skalarprodukt $(Ax, x) > 0$ erfüllt. A heißt negativ definit, falls $-A$ positiv definit ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 5.3 4 Punkte

Überprüfen Sie die folgenden Funktionen auf Extrema.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = (x^2 - y)(2x^2 - y)$$

im Nullpunkt kein lokales Minimum besitzt, dass jedoch die Einschränkung von f auf eine beliebige Gerade durch den Nullpunkt dort ein lokales Minimum besitzt.

(b) Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema von $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = 2x_1^2 + (x_2 - x_3)^4 + 2(1 - x_2)^2.$$

Aufgabe 5.4 4 Punkte

Untersuchen Sie in Abhängigkeit von $u_0 \in \mathbb{R}$ die Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} u'(t) = \frac{1}{2u(t)} \quad \text{für} \quad t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

(a) Existiert für jedes $u_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung $u \in C(\mathbb{R}_+) \cap C^1(\mathbb{R}_{>0})$? Geben Sie gegebenenfalls die Lösung(en) an.

(b) Prüfen Sie, für welche $u_0 \in \mathbb{R}$ sich die Lösung stetig differenzierbar nach $t = 0$ fortsetzen lässt, d.h. $u \in C^1(\mathbb{R}_+)$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass die Lösungen für $u_0 = 0$ die Integralgleichung aus Aufgabe 1.4 (a) erfüllen. Ist dies ein Widerspruch zur gezeigten Äquivalenz aus Aufgabe 1.4 (a)?