Analysis 2 - Übungsblatt 6

Sommersemester 2017

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Jan-Erik Busse, Chris Kowall

Internetseite: `http://www.biostruct.uni-hd.de/Analysis2.php`

Abgabe: 2. Juni, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 6.1 4 Punkte

Seien $\mathbb{K}$ der Körper der reellen oder komplexen Zahlen, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{K}^{n\times n}, u_0 \in \mathbb{K}^n$ sowie $t_0 \in \mathbb{R}$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass die vektorwertige Lösung des linearen Systems

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) \quad \text{für} \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

von n Differentialgleichungen durch $u(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}u_0$ gegeben ist.

(b) Sei $b : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$ eine stetige Funktion. Beweisen Sie die Eindeutigkeit der Lösung und leiten Sie die folgende Lösungsformel

$$u(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}u_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{(t-s)A}b(s)\,\mathrm{d}s \qquad \text{für} \quad t \in \mathbb{R}$$

für inhomogene lineare Systeme der Form

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + b(t) \quad \text{für} \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

her, wobei die Riemann-Integration vektorwertiger Funktionen komponentenweise zu verstehen ist.

(c) Lösen Sie das System explizit für die Werte

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad u(0) = u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.2 4 Punkte

Lösen Sie die folgenden Anfangswertaufgaben und bestimmen Sie das maximale Existenzintervall $I \subset \mathbb{R}$.

(a) Prüfen Sie in Abhängigkeit von $u_0 \in \mathbb{R}$, ob die Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} u'(t) = 2tu(t)^2 \quad \text{für} \quad t \in I, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

eine lokale oder sogar globale eindeutige Lösung $u \in C^1(I)$ besitzt. Geben Sie diese jeweils an.

(b) Geben Sie die Lösung zu beliebigem Startwert $u(0) = u_0 \in \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$u'(t) = \sin^3(t) - u(t)\sin(t) \quad \text{für} \quad t \in I$$

an. Diskutieren Sie, ob die Lösung global ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 6.3 4 Punkte

Betrachten Sie die stetige Funktion

$$f : [0, \mathrm{e}^{-1}] \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto \begin{cases} -u \ln(u) & \text{für} \quad u \in (0, \mathrm{e}^{-1}], \\ 0 & \text{für} \quad u = 0. \end{cases}$$

(a) Beweisen Sie, dass f monoton steigend und konkav ist sowie der Abschätzung

$$|f(u) - f(v)| \leq f(|u - v|) \qquad \forall\, u, v \in [0, \mathrm{e}^{-1}]$$

genügt.

Hinweis. Verwenden Sie Aufgabe 11.1 (a) aus Analysis 1.

(b) Zeigen Sie, dass die Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)) & \text{für} \quad t \in [0, 1], \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

eine eindeutige lokale Lösung besitzt, jedoch

$$\int_{\varepsilon}^{1/\mathrm{e}} \frac{1}{f(z)}\, \mathrm{d}z \to \infty \qquad (\text{für } \varepsilon \to 0^+)$$

gilt. Wählen Sie zum Beweis der Eindeutigkeit zwei Lösungen u, v der Differentialgleichung und betrachten Sie deren Differenz mithilfe von Aufgabenteil (a).

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion f nicht lokal Lipschitz-stetig ist, obwohl eine eindeutige Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe existiert.

Aufgabe 6.4 4 Punkte

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall, welches eine Umgebung der 0 enthalte, und betrachten Sie für beliebiges $u_0 \in \mathbb{R}$ die Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} u'(t) = tu(t) + t^3 & \text{für} \quad t \in I, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie für $I \subset (-1, 1)$ mithilfe des Banachschen Fixpunktsatzes aus der Vorlesung, dass es genau eine Lösung $u \in C^1(I)$ der Anfangswertaufgabe gibt. Verwenden Sie hierzu die Ideen von Aufgabe 1.4 um einen geeigneten Integraloperator auf $C(I)$ mit der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ zu definieren.

(b) Prüfen Sie die Anwendbarkeit von Aufgabe 2.3, indem Sie den iterierten Integraloperator betrachten und die Existenz einer eindeutigen Lösung auf beliebigen Intervallen I mit der obigen Eigenschaft zeigen. Bestimmen Sie die explizite Lösung, die offenbar auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.