Analysis 2 - Übungsblatt 9

Sommersemester 2017

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Jan-Erik Busse, Chris Kowall

Internetseite: `http://www.biostruct.uni-hd.de/Analysis2.php`

Abgabe: 23. Juni, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 9.1 4 Punkte

Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall für $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, und seien $p, q : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Betrachten Sie die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = 0 \qquad \forall\, t \in I.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung für jedes Paar $(u(t_0), u'(t_0))$ von Anfangswerten zu einem festen $t_0 \in I$ eine globale, eindeutige Lösung $u : I \to \mathbb{R}$ besitzt.

(b) Sei $u_1 : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der obigen Differentialgleichung und gebe es ein nicht leeres Intervall $J \subset I$ mit $u_1(t) \neq 0$ für alle $t \in J$. Beweisen Sie, dass der Ansatz

$$u_2(t) = u_1(t)w(t) \qquad \forall\, t \in J$$

mit einer nicht konstanten Funktion $w \in C^2(J)$ eine weitere, linear unabhängige Lösung $u_2 : J \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung liefert. Welcher Differentialgleichung genügt dabei w?

Aufgabe 9.2 4 Punkte

Für $n \in \mathbb{N}_0, t \in \mathbb{R}$ seien die sogenannte Hermite-Polynome durch

$$H_n(t) = (-1)^n \mathrm{e}^{t^2} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n \mathrm{e}^{-t^2}$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass H_n tatsächlich ein Polynom vom Grad n ist für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Berechnen Sie H_n für $n = 0, 1, 2$ explizit.

(b) Verwenden Sie die Beziehung $H_n' = 2nH_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und zeigen Sie, dass H_n die Differentialgleichung

$$H_n''(t) - 2tH_n'(t) + 2nH_n(t) = 0 \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ erfüllt.

(c) Betrachten Sie die Differentialgleichung für $n = 1$, d.h.

$$u''(t) - 2tu'(t) + 2u(t) = 0 \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

mit Anfangsdaten $(u(0), u'(0)) = (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ und bestimmen Sie die zugehörige Lösung. Benutzen Sie neben der durch H_1 induzierten Teillösung die Reduktionsmethode aus Aufgabe 9.1 und vereinfachen Sie das auftretende Integral in der Lösungsformel für u möglichst weit.

Bitte wenden!

Aufgabe 9.3 4 Punkte

Betrachten Sie zu $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ und $f \in C(\mathbb{R})$ die autonome Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\begin{cases} u''(t) = f(u(t)) & \text{für} \quad t \in I, \\ (u(0), u'(0)) = (u_0, v_0) \end{cases}$$

auf dem maximalen Existenzintervall $I \subset \mathbb{R}$ einer Lösung $u \in C^2(I)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Energie

$$E(t) := \frac{1}{2}(u'(t))^2 - F(u(t)) \qquad \text{für} \quad F(u) = \int_{u_0}^{u} f(s)\,\mathrm{d}s$$

zeitlich konstant ist für eine Lösung u der obigen Differentialgleichung. Welche Differentialgleichung erfüllt damit u' in I?

Mit der Wahl $f(s) = -\omega^2 s$ für ein reelles $\omega > 0$ erhält man die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators.

(b) Zeigen Sie, dass die Lösung des harmonischen Oszillators eindeutig und global auf $\mathbb{R}$ existiert und formulieren Sie die Differentialgleichung für u'.

(c) Betrachten Sie die Differentialgleichung für u' und verwenden Sie die Methode der Trennung der Variablen zur Bestimmung der Lösung u zu den speziellen Anfangsdaten $(u_0, v_0) = (0, 1)$.

Aufgabe 9.4 4 Punkte

Untersuchen Sie die Stabilität der stationären Punkte der nichtlinearen skalaren Gleichung

$$\begin{cases} u'(t) = \lambda u(t) - (u(t))^3 & \text{für} \quad t \in I, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

mit $u_0 \in \mathbb{R}$ in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$. I sei in diesem Fall das maximale Existenzintervall der reellwertigen Lösung $u \in C^2(I)$.

(a) Geben Sie die stationären Punkte $\overline{u}$ in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$ an.

(b) Zeigen Sie im Fall $\lambda = 0$ unter Verwendung der Definition, dass der Ursprung asymptotisch stabil ist.

(c) Welche stationären Punkte $\overline{u}$ sind im Fall $\lambda > 0$ stabil, welche instabil? Betrachten Sie hierzu die linearisierte Gleichung

$$z'(t) = f_u(\overline{u})z(t)$$

für die rechte Seite $f(u) = \lambda u - u^3$.

Bitte wenden!

Die folgenden Aufgaben sind Bonus-Aufgaben, die zusätzliche Punkte einbringen, aber nicht bearbeitet werden müssen.

***Aufgabe 9.5** 4 Punkte

Seien $t_0 \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ und $A : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ eine stetige Funktion. Seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ Lösungen zur Differentialgleichung

$$u'(t) = A(t)u(t) \qquad \forall\, t \geq t_0,$$

welche spaltenweise zusammengefasst mit $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ bezeichnet seien und den Anfangswerten $\Phi(t_0) = \Phi_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genügen. Verallgemeinern Sie Übungsaufgabe 8.1 (a):

(a) Seien $B, R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ stetige, matrixwertige Funktionen mit

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|R(h)\|}{|h|} = 0.$$

Zeigen Sie mithilfe einer geeigneten Darstellung der Determinante, dass es eine Funktion $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$\det(B(h) + R(h)) = \det(B(h)) + \omega(h) \qquad \text{mit} \quad \lim_{h\to 0} \frac{|\omega(h)|}{|h|} = 0.$$

(b) Sei $a(t) := \operatorname{spur}(A(t))$. Beweisen Sie, dass es eine gewisse Fehlerfunktion $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $\varphi(t) = \det(\Phi(t))$ die Gleichung

$$\det(\Phi(t) + h\Phi'(t)) = \varphi(t)(1 + ha(t) + r(h)) \qquad \text{mit} \quad \lim_{h\to 0} \frac{|r(h)|}{|h|} = 0$$

erfüllt.

(c) Argumentieren Sie, warum $\varphi(t) = \det(\Phi(t))$ stetig differenzierbar ist und folgern Sie

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\, \mathrm{d}s \right) \qquad \forall\, t \geq t_0.$$

***Aufgabe 9.6** 4 Punkte

Betrachten Sie für $E \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $V \in C(\mathbb{R})$ die Differentialgleichung

$$u''(t) + V(t)u(t) + Eu(t) = 0 \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

(a) Machen Sie sich klar, dass obiges Problem eine eindeutige globale Lösung $u \in C^2(\mathbb{R})$ zu vordefinierten Anfangswerten $(u(0), u'(0)) = (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ besitzt und bestimmen Sie explizit die Lösung für konstantes $V \in \mathbb{R}$.

(b) Betrachten Sie nun $V(t) = -(V_0 t)^2$ zu festem $V_0 > 0$ und verwenden Sie die Hermite-Polynome H_n zum Nachweis, dass

$$u(t) = w(\sqrt{V_0}t) \qquad \text{mit} \quad w(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2} H_n(t)$$

für gewisse Werte von E die Differentialgleichung löst. Bestimmen Sie die Energien $E = E_n$ in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}_0$.

(c) Berechnen Sie für $n = 1$ mit der Lösung u aus Aufgabenteil (b) das uneigentliche Integral

$$\int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2\, \mathrm{d}t.$$

Hinweis. Sie können den Wert $\int_{\mathbb{R}} \exp(-t^2/2)\, \mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$ verwenden.