Interdisziplinäres Zentrum für Wissenschaftliches Rechnen der Universität Heidelberg

Heidelberg, 9. November 2012
Im Neuenheimer Feld 368

Dr. Mario S. Mommer
Andreas Sommer

Numerische Lineare Algebra

WS 2012/2013

3. Übungsblatt

1. Aufgabe: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für jede reguläre Matrix $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die gewichtete p-Norm

$$\|\cdot\|_W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \|x\|_W := \|Wx\|_p$$

die Definition einer Norm erfüllt ($1 \leq p < \infty$).

2. Aufgabe: (2+2 Punkte)

Berechnen (von Hand!) Sie Kern, Bild und Rang, sowie eine Singulärwertzerlegung der folgenden Matrizen:

$$(a)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (b)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

Tipp: Schauen Sie sich die Matrizen vorher genau an.

3. Aufgabe: (4 Punkte)

Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ heißen *orthogonal äquivalent*, falls eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ existiert, sodass $A = QBQ^T$. Prüfen Sie, ob die Aussage "A und B sind orthogonal äquivalent genau dann, wenn sie die gleichen Singulärwerte haben" richtig ist. Falls nein, in welcher Richtung stimmt die Aussage?

4. Aufgabe:

Wir untersuchen die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}$$

.

a) Bestimmen Sie eine Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$. Da sie nicht eindeutig ist, bestimmen Sie diejenige mit der kleinsten Anzahl negativer Werte in U und V. (2 Punkte)

b) Listen Sie die Singulärwerte sowie die linken und rechten Singulärvektoren von A auf. Fertigen Sie anschließend eine sorgsam beschriftete Zeichnung der Einheitskugel im $\mathbb{R}^2$, sowie ihrem Bild unter der durch A beschriebenen Transformation. Zeichnen Sie die Singulärvektoren ein und beschriften Sie ihre Enden mit ihren Koordinaten. (2 Punkte)

c) Berechnen Sie die 1-, 2-, ∞-, und Frobenius-Norm von A. (2 Punkte)

d) Bestimmen Sie A^{-1} aus der Singulärwertzerlegung von A. (2 Punkte)

e) Welche Eigenwerte λ_1, λ_2 hat A? (1 Punkt)

f) Rechnen Sie nach, dass $\det A = \lambda_1 \lambda_2$ und $|\det A| = \sigma_1 \sigma_2$. (1 Punkt)

g) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Ellipse, auf die A die Einheitskugel abbildet. (1 Punkt)

Abgabetermin: Dienstag, der 06.11.2012, in der Vorlesung