

Dr. Mario S. Mommer
Andreas Sommer

Numerische Lineare Algebra

WS 2012/2013

13. Übungsblatt

1. Aufgabe:

(8 Punkte)

Im GMRES-Verfahren ist u.a. die Bestimmung von

$$y_s = \arg \min_y \|r_0 - AV_s y\|^2$$

$$\iff y_s = \arg \min_y \|\beta e_1 - \tilde{H}_s y\|^2$$

nötig, was sich mittels QR-Zerlegung von \tilde{H}_s erledigen lässt. Da in jeder Iteration die Matrix \tilde{H}_s um nur eine Spalte/Zeile vergrößert wird, verwenden wir eine progressive QR-Zerlegung, die die jeweils vorhergehende Zerlegung wiederverwendet und aktualisiert.

- Entwerfen Sie einen (ausführlichen) Algorithmus für eine progressive QR-Zerlegung für H_s (FOM) bzw. \tilde{H}_s (GMRES), die GIVENS-Rotationen verwendet.
- Notieren Sie eine zweite Variante für den Fall, dass H_s bzw. \tilde{H}_s symmetrisch ist (also insbesondere in Tri-Diagonalform vorliegt).

2. Aufgabe:

(4 Punkte)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ symmetrisch positiv definit und es gelte $A^j = A$ für ein $j \in \mathbb{N}$ mit $n > j > 1$. Zeigen Sie, dass dann das CG-Verfahren spätestens in j Iterationen die exakte Lösung des Systems $Ax = b$ für beliebiges $b \in \mathbb{R}^m$ liefert (d.h. also $Ax_j = Ax = b$).

Abgabetermin: Dienstag, der 29.01.2013, vor der Vorlesung

Programmieraufgabe

(10 Punkte)

Implementieren Sie das CG-Verfahren aus der Vorlesung.

Testen Sie das Verfahren am diskretisierten 1D-POISSON-Problem mit $h_\ell = \frac{1}{8}$, (d.h. also $N_\ell = 7$, und $A_\ell u^\ell = f^\ell$ mit $A_\ell = \text{tridiag}\{-64, 128, -64\}$). Als rechte Seite verwenden Sie $f^\ell = (128, -448, 704, -832, 512, 128, 320)^T$; die Startlösung sei der Nullvektor.

Lassen Sie ihr Programm eine Tabelle mit Iterationszähler, den Komponenten der aktuellen Iterierten auf drei Stellen genau sowie der Norm des aktuellen Residuums analog der Abbildung unten ausgeben.

Verfahren der konjugierten Gradienten (CG-Verfahren)								
m	$u_{m,1}$	$u_{m,2}$	$u_{m,3}$	$u_{m,4}$	$u_{m,5}$	$u_{m,6}$	$u_{m,7}$	$\ r_m\ _2$
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1336.36
1	0.58	-2.04	3.21	-3.79	2.33	0.58	1.46	363.57
2	-0.39	-1.72	2.81	-4.57	3.00	4.99	4.26	252.76
3	-0.01	-2.38	2.06	-3.53	4.87	6.07	6.25	153.30
4	-0.14	-2.88	2.57	-2.13	6.50	7.48	5.93	117.64
5	-0.70	-2.18	3.53	-1.12	7.65	7.81	6.27	103.52
6	0.13	-1.14	5.40	0.54	8.23	8.54	6.98	89.70
7	1.00	0.00	6.00	1.00	9.00	9.00	7.00	0.00

Abgabe Programmieraufgabe: Dienstag, der 29.01.2013

Programmieraufgabe

(10 BONUS-Punkte)

Implementieren Sie das Arnoldi-Verfahren und das Lanczos-Verfahren zur Bildung einer Orthonormalbasis.

Funktionskopf: $[V, H] = \text{Arnoldi}(A, k, v_0)$, bzw. analog für Lanczos

Erzeugen Sie eine (zufällige) $n \times n$ Matrix A , sowie $B = A^T A$ und testen Sie Ihre Programme damit (orthogonalisieren Sie nur bis $k = n - 1$).

Finden Sie eine Matrix, bei der die Orthogonalisierung mittels Lanczos fehlschlägt (d.h. zeigen Sie, dass $V^T * V$ „weit weg“ von der Einheitsmatrix liegt). Können Sie den Fehlschlag erklären?

Abgabe Bonus-Programmieraufgabe: Mittwoch, der 30.01.2013