Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. W. Jäger
Julian Scheuer

Sommersemester 2012
11.05.2012
Blatt 4

Übungen zur Vorlesung
Funktionalanalysis

Aufgabe 4.1 (4 Punkte)
Seien E_i, $1 \leq i \leq n$, und F normierte Räume und $E = \prod_{i=1}^n$ der Produktraum.
Sei

$$A\colon E \to F$$

multilinear. Zeigen Sie, dass A genau dann stetig ist, wenn eine Konstante $c \geq 0$ existiert mit

$$\|A(x^1, \ldots, x^n)\| \leq c\|x^1\| \cdots \|x^n\| \quad \forall x = (x^i) \in E.$$

Aufgabe 4.2 (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Bezeichne $H_0^{1,2}(\Omega) \subset H^{1,2}(\Omega)$ den Abschluss des Raumes $C_0^1(\Omega)$ aller stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω bezüglich der $H^{1,2}$-Norm. Beweisen Sie, dass eine Konstante C existiert, die von Ω abhängen darf, sodass

$$\int_\Omega |u|^2 \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2 \quad \forall u \in H_0^{1,2}(\Omega).$$

Aufgabe 4.3 (4 Punkte)
Sei $X = \prod_{j \in J} X_j$ ein topologisches Produkt von topologischen Räumen. Beweisen Sie, dass eine Folge $x_n = (x_n^j)$ genau dann in X gegen ein $x = (x^j)$ konvergiert, wenn für alle $j \in J$

$$x_n^j \to x^j$$

gilt.
Bemerkung: Die Produkttopologie erzeugt also die punktweise Konvergenz.

Aufgabe 4.4 (3+1 Punkte)
(1) Sei (X, d) ein metrischer Raum, $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X und $a \in X$. Zeigen Sie: Falls jede Teilfolge von (a_k) eine gegen a konvergente Teilfolge enthält, so konvergiert die gesamte Folge gegen a.
(2) Gilt die Aussage auch in allgemeineren als in metrischen Räumen? Beweisen Sie ihre Behauptung.

Abgabe: Freitag, 18.05.2012, 17 Uhr.