Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. W. Jäger
Julian Scheuer

Sommersemester 2012
18.05.2012
Blatt 5

Übungen zur Vorlesung
Funktionalanalysis

Aufgabe 5.1 (4 Punkte)
Sei J eine Indexmenge und $(a_j)_{j\in J}$ eine Familie reeller Zahlen mit der Eigenschaft

$$\sup \{\sum_{j\in I} |a_j| \colon I \text{ abzählbar}\} < \infty,$$

dann gilt

$$a_j \neq 0$$

für höchstens abzählbar viele $j \in J$.

Aufgabe 5.2 (2 Punkte)
Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und P eine lineare Projektion auf X. Nehme an l sei ein Eigenwert von P. Zeigen Sie, dass $l \in \{0,1\}$ ist.

Aufgabe 5.3 (6 Punkte)
Sei H ein Hilbertraum, $\emptyset \neq K \subset H$ eine abgeschlossene, konvexe Menge und $y \in H$, dann hat das Variationsproblem

$$j(x) = \|x - y\| \to \min, \quad x \in K,$$

eine eindeutige Lösung $x_0 \in K$, d.h.

$$\|y - x_0\| \leq \|y - x\| \quad \forall x \in K.$$

Die Lösung x_0 heißt die Projektion von y nach K.

Aufgabe 5.4 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass der sogenannte Hilbertkubus

$$K = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{R}) \colon |x_i| \leq \frac{1}{i} \ \forall i \in \mathbb{N}\}$$

kompakt in $l^2(\mathbb{R})$ ist.

Abgabe: Freitag, 25.05.2012, 17 Uhr.