Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg Sommersemester 2012
Institut für Angewandte Mathematik 08.06.2012
Prof. Dr. W. Jäger Blatt 8
Julian Scheuer

Übungen zur Vorlesung
Funktionalanalysis

Aufgabe 8.1 (4+2 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $u \in L^1(\Omega)$ definiere

$$\int_\Omega |Du| := \sup\{\int_\Omega u \ \mathrm{div}(\eta) : \eta \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n), |\eta|_{C^0} \leq 1\} \in [0, \infty].$$

Sei

$$BV(\Omega) := \{u \in L^1(\Omega) : \int_\Omega |Du| < \infty\}.$$

Beweisen Sie:
(i) Definiert man

$$\|u\| := \|u\|_{L^1(\Omega)} + \int_\Omega |Du|,$$

so ist $(BV(\Omega), \|\cdot\|)$ ein vollständiger normierter Raum (Diese Formulierung soll andeuten, dass beides gezeigt werden soll.)
(ii) $H^{1,1}(\Omega)$ ist ein Untervektorraum von $BV(\Omega)$.

Aufgabe 8.2 (4 Punkte)
Seien E und F normierte Räume und $A \in \mathcal{L}(E, F)$. A heißt kompakt, falls A beschränkte Mengen auf relativ kompakte Mengen abbildet.
Seien nun $(E_i, \|\cdot\|_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, Banachräume mit einer kompakten Einbettung

$$E_1 \hookrightarrow E_2$$

und einer stetigen Einbettung

$$E_2 \hookrightarrow E_3.$$

Beweisen Sie:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists c_\epsilon > 0 \ \forall u \in E_1 \colon \|u\|_2 \leq \epsilon \|u\|_1 + c_\epsilon \|u\|_3.$$

Aufgabe 8.3 (6 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $a = (a^{ij}) \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n \times n})$, sodass (a^{ij}) symmetrisch und gleichmässig in Ω positiv definit ist. Sei $f \in L^2(\Omega)$. Zeigen Sie, dass eine schwache Lösung $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$ des sogenannten Dirichlet'schen Randwertproblems

$$-\sum_{i,j=1}^n \partial_j(a^{ij} \partial_i u) = f$$

$$u_{|\partial\Omega} = 0$$

existiert, d.h.

$$\forall v \in H_0^{1,2}(\Omega) \colon \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i u \partial_j v = \int_\Omega f v.$$

Abgabe: Freitag, 15.06.2012, 17 Uhr.