Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. W. Jäger
Julian Scheuer

Sommersemester 2012
22.06.2012
Blatt 10

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis

Aufgabe 10.1 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$\chi_{(n,n+1)} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$$

für $n \to \infty$ schwach nach 0 konvergieren, wobei χ_A die charakteristische Funktion einer Menge A bezeichnet.

Aufgabe 10.2 (4 Punkte)
Sei H ein Hilbertraum und $\phi\colon H \to \mathbb{R}$ eine konvexe und stetige Abbildung.
Gelte $x_n \rightharpoonup x,\ n \to \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\phi(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \phi(x_n).$$

Aufgabe 10.3 (4 Punkte)
Sei X ein Banachraum und $K \subset X$ kompakt. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit

$$x_n \rightharpoonup x \ \wedge \forall n \in \mathbb{N}\colon x_n \in K.$$

Beweisen Sie

$$x_n \to x.$$

Aufgabe 10.4 (4 Punkte)
Finden Sie in $\mathcal{L}^2((0,1))$ eine Folge f_j, sodass

(1) $f_j \to 0$ f.ü.
(2) $f_j \rightharpoonup 0$ in $\mathcal{L}^2$
(3) $f_j \not\to 0$ in $\mathcal{L}^2$.

Abgabe: Freitag, 29.06.2012, 17 Uhr.