UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA
FACOLTÀ DI SCIENZE MM.FF.NN.
Dipartimento di Matematica

Alcuni risultati sulla teoria delle Superfici di Riemann

Relatore:
Dott.ssa Paola Frediani

TESI DI LAUREA TRIENNALE
di Samuele Anni

Anno Accademico 2006/2007

Indice

Introduzione

Lo scopo di questa breve esposizione è quello di presentare alcuni risultati sulla Teoria delle Superfici di Riemann, giungendo a dimostrare il Teorema di Riemann-Roch, strumento fondamentale nello studio di tali Superfici.

Nel primo capitolo, dopo alcuni richiami di Analisi Complessa, viene introdotta la nozione di Superficie di Riemann insieme ad alcuni esempi: la Sfera di Riemann, i tori complessi, le Curve Piane Affini e le Curve Piane Proiettive. Inoltre vengono descritte le funzioni olomorfe e meromorfe sulle Superfici di Riemann, strumenti indispensabili nello studio della struttura di tali oggetti. A tal proposito viene, inoltre, enunciato il Teorema di Riemann-Hurwitz per un'applicazione olomorfa tra Superfici di Riemann compatte.

Nel secondo capitolo, si propone un breve studio delle forme differenziali e degli spazi di funzioni ad esse connessi. In tal modo si possono caratterizzare differenziali pull-back legati a mappe olomorfe fra Superfici di Riemann e si può arrivare ad enunciare il Teorema dei Residui che studia i differenziali su superfici compatte.

Nel terzo capitolo viene data la definizione di divisore, oggetto fondamentale nello studio delle Superfici di Riemann:

Definizione. *Data X Superficie di Riemann, si dice divisore di X, una funzione D a valori interi, il cui supporto è discreto come sottoinsieme di X. Un divisore su X si indica con:*

$$D = \sum_{p \in X} D(p) \cdot p$$

Si passa quindi a costruire divisori utilizzando mappe olomorfe e meromorfe introdotte in precedenza, oppure utilizzando le forme differenziali. A questo punto si definisce una relazione di equivalenza fra divisori detta equivalenza lineare e si introduce l'insieme delle classi di equivalenza detto gruppo di Picard. Due divisori, infatti, si dicono linearmente equivalenti se la loro differenza è un divisore associato ad una funzione meromorfa, ovvero è un divisore principale. Dopo aver fornito esplicazioni ed esempi legati all'equivalenza lineare viene enunciato e dimostrato il Teorema di Bezout.

Il passo successivo è quello di definire il $\mathbb{C}$-spazio vettoriale delle funzioni meromorfe controllate dal divisore D: lo spazio $\mathcal{L}(D)$, insieme al concetto di sistema lineare completo $|D|$ ovvero l'insieme dei divisori effettivi linearmente equivalenti a D.
Considerato lo spazio $\mathcal{L}(D)$, se ne si prende il proiettivizzato $\mathbb{P}(\mathcal{L}(D))$ e si definisce la mappa $S : \mathbb{P}(\mathcal{L}(D)) \to |D|$ in modo che la classe di ogni funzione $[f]$ sia mandata in $div(f) + D$ si ottiene un isomorfismo se la Superficie di Riemann è compatta. In questo modo lo studio dei sistemi lineari completi è ricondotto allo studio degli spazi $\mathcal{L}(D)$.

Nel quarto capitolo vengono presentati brevemente alcuni concetti di fondamentale importanza: la teoria dei fasci e la Coomologia di Cĕch.
La teoria dei fasci fornisce degli strumenti, i fasci appunto, con cui poter rileggere gran parte degli spazi funzionali definiti in precedenza e delle strutture, le successioni esatte, utili per poter rileggere le proprietà di funzioni e divisori definiti sulle Superfici di Riemann.
La Coomologia di Cĕch, invece, è una costruzione che associa ad ogni fascio una successione di gruppi contenenti informazioni sulle proprietà globali dello stesso. Molti problemi di natura geometrica sono facilmente risolvibili a livello locale mentre l'equivalente dal punto di vista globale richiede strumenti appositi: fasci e gruppi di coomologia forniscono i mezzi adatti a risolvere questo tipo di questioni.

Nell'ultimo capitolo viene presentato e dimostrato il Teorema di Riemann-Roch :

Teorema di Riemann-Roch. *Sia X una Superficie di Riemann compatta e sia $D \in Div(X)$, allora si ha che*

$$dim_{\mathbb{C}}\mathcal{L}(D) = deg(D) + 1 - g + dim_{\mathbb{C}}\mathcal{L}(K - D)$$

dove: g è il genere della Superficie di Riemann, e $K = div(\omega)$ con $\omega \in \mathcal{M}^1_X$ non nullo è un qualunque divisore canonico.

Questo teorema, di importanza notevole, lega gli spazi $\mathcal{L}(D)$ ai divisori D e garantisce l'esistenza di funzioni meromorfe sulle Superfici di Riemann.

Capitolo 1

Superfici di Riemann

1.1 Concetti preliminari

Definizione 1.1. *Sia U un aperto di $\mathbb{C}$. Una funzione $f : U \to \mathbb{C}$ si dice* olomorfa *se è derivabile in senso complesso, cioè se per ogni punto $z \in U$ esiste il limite per $\epsilon \in \mathbb{C}$, $\lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(z+\epsilon)-f(z)}{\epsilon}$. Una funzione olomorfa su $U \equiv \mathbb{C}$ si dice* intera.

La definizione data può essere estesa a n variabili. Sia, quindi, sia $\mathbb{C}^n$ lo spazio vettoriale complesso n -dimensionale e indichiamo con $z = (z_1, \dots, z_n)$ il vettore di $\mathbb{C}^n$ di coordinate $z_1, \dots, z_n$.
Chiamiamo poliraggio l'n-upla $r = (r_1, \dots, r_n)$, $\quad r_i > 0$, e chiamiamo polidisco di centro $w = (w_1, \dots, w_n)$ e poliraggio r il sottoinsieme di $\mathbb{C}^n$ dato da $\Delta(w, r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_i - w_i| < r_i\} = \Delta(w_1, r_1) \times \cdots \times \Delta(w_n, r_n)$. Dato un tale polidisco, il suo bordo è $\partial_0 \Delta(w, r) = \partial \Delta(w_1, r_1) \times \cdots \times \partial \Delta(w_n, r_n)$.

Definizione 1.2. *Sia $D \subseteq \mathbb{C}^n$ aperto. Una funzione $f : D \to \mathbb{C}^n$ si dice* olomorfa *se per ogni $w \in \mathbb{C}^n$ esiste un aperto $U \subset D$, con $w \in U$, tale che per ogni $z \in U$ si abbia*

$$f(z) = \sum_{I \in \mathbb{N}^n} a_I (z - w)^I = \sum_{i_1, \dots, i_n \geq 0} a_{i_1, \dots, i_n} (z_1 - w_1)^{i_1} \dots (z_n - w_n)^{i_n}$$

dove $I = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$ e $z^I = {z_1}^{i_1}, \dots, {z_n}^{i_n}$

Dalla definizione segue che la proprietà di olomorfia è una proprietà locale, pertanto $f : D \to \mathbb{C}^n$ risulta olomorfa se e solo se $f|_{\Delta}$ è olomorfa per ogni $\Delta \in D$ polidisco.

Proposizione 1.1. *Sia $D \subseteq \mathbb{C}^n$ un aperto, una funzione $f : D \to \mathbb{C}^n$ è olomorfa se e solo se è continua e separatamente olomorfa, cioè l'applicazione $z_i \longmapsto f(z_1, \dots, z_n)$ è olomorfa per ogni i e per ogni $z_1, \dots, \widehat{z_i}, \dots, z_n$.*

Le funzioni olomorfe in n variabili possono essere caratterizzate tramite un analogo delle equazioni di Cauchy-Riemann in una variabile. Sia infatti $D \subseteq \mathbb{C}^n \equiv \mathbb{R}^{2n}$ aperto e sia $f : D \to \mathbb{C}^n$ una funzione di classe C^1.
Dette x_j, y_j le $2n$ coordinate in $\mathbb{R}^{2n}$, poniamo $z_j = x_j + iy_j$ e $\bar{z}_j = x_j - iy_j$, da cui $dz_j = dx_j + i\, dy_j$ e $d\bar{z}_j = dx_j - i\, dy_j$.
Valgono le seguenti identità:

$$x_j = \frac{z_j + \bar{z}_j}{2} \qquad y_j = \frac{z_j - \bar{z}_j}{2i}$$

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$

Allora

$$df = \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}dx_j + \frac{\partial f}{\partial y_j}dy_j\right) = \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial z_j}dz_j + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}d\bar{z}_j\right) = \partial f + \bar{\partial} f.$$

dove

$$\partial f = \sum_j \frac{\partial f}{\partial z_j}dz_j \qquad \bar{\partial} f = \sum_j \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}d\bar{z}_j$$

Valgono i seguenti:

Teorema 1.1. *Una funzione f, di classe C^1, è olomorfa se e solo se*

$$\bar{\partial} f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}d\bar{z}_j = 0$$

Proposizione 1.2. *Siano $D \subseteq \mathbb{C}^n$ un aperto connesso, $f : D \to \mathbb{C}^n$ una funzione olomorfa. Se $f = 0$ su un aperto non vuoto di D, allora $f = 0$ su D.*

Corollario 1.2.1. *Siano $D \subseteq \mathbb{C}^n$ un aperto connesso, $f, g : D \to \mathbb{C}^n$ funzioni olomorfe. Se $f = g$ su un aperto $E \subseteq D$ non vuoto, allora $f = g$ su D.*

Teorema di Liouville. *Se f è funzione olomorfa intera, allora f è limitata se e solo se è costante, ed è un polinomio (di grado minore o uguale ad n) se e solo se è $O(|z|^n)$.*

Definizione 1.3. *Se $f(z) = \sum_{i \geq m} a_i(z - z_0)^i$ è lo sviluppo di Taylor di f in z_0, e $a_m \neq 0$, allora m si dice* ordine di zero *di f in z_0 e si scrive $ord_{z_0} f(z) = min\,\{m \in \mathbb{N} : a_m \neq 0\}$.*

Principio del massimo modulo. *Se f è funzione olomorfa e z_0 è punto di massimo relativo per $|f|$, allora f è costante nella componente connessa di z_0.*

Una volta definite le funzioni olomorfe, naturalmente segue l'estensione data dalle funzioni meromorfe.

Definizione 1.4. *Una funzione $f : U \to \mathbb{C}$ si dice* meromorfa *in $z_0 \in U$ se è olomorfa fuori di z_0 e ammette uno sviluppo di Laurent finito (negativamente)*

$$f(z) = \sum_{i \geq -m} a_i(z - z_0)^i \quad con \quad m > 0$$

Il punto z_0 si dice un polo (isolato) di f, e l'intero m si dice ordine di polo di f in z_0.

Se f è meromorfa in z_0, si dice residuo di f in z_0 il numero complesso a_{-1} dello sviluppo di Laurent. Vale che

$$res_{z_0} f = a_{-1} = \int_{\partial\Delta} f(\varsigma)\, d\varsigma$$

ove Δ è un disco aperto tale che $z_0 \in \Delta$ e in cui lo sviluppo di Laurent di f converge.

1.2 Superfici di Riemann: definizione ed esempi

Definizione 1.5. *Sia M uno spazio topologico di Hausdorff a base numerabile. M è una* varietà complessa *di dimensione n se esiste un ricoprimento aperto, $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$, tale che:*

- *$\forall \alpha$ esiste un omeomorfismo ϕ_α e un aperto $V_\alpha \subseteq \mathbb{C}^n$ con*

  $$\phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$$

  la famiglia $\{\phi_\alpha\}_\alpha$ è detta famiglia delle carte locali.

- *$\forall \alpha, \beta$ tali che $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ l'applicazione*

  $$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} := \phi_\alpha (U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta (U_\alpha \cap U_\beta)$$

  è una funzione olomorfa, detta funzione di cambio di coordinate locali.

Definizione 1.6. *Una* Superficie di Riemann *è una varietà complessa connessa di dimensione* 1*, ovvero è uno spazio topologico di Hausdorff, a base numerabile e connesso con ricoprimento aperto $\{U_i\}$ e carte (omeomorfismi) $\{\phi_i : U_i \to V_i\}$, ove $\{V_i\}$ sono aperti di $\mathbb{C}$ tali che le mappe di transizione $\phi_{i,j} = \phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$ siano mappe olomorfe.*

Dalla definizione segue chiaramente che il determinante della matrice di transizione fra carte, grazie alle relazioni di Cauchy-Riemann, è sempre positivo. Quindi, per il teorema di classificazione delle 2-varietà compatte orientate si ha che:

Proposizione 1. *Ogni superficie di Riemann è una varietà reale $\mathcal{C}^\infty$ di dimensione 2 connessa per archi. Ogni superficie di Riemann è orientabile e, quindi, se è compatta è diffeomorfa ad una somma connessa di g tori per un unico $g \geq 0$, $g \in \mathbb{N}$.*

Gli aperti di $\mathbb{C}$ sono superficie di Riemann (non compatte), così come $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}^*$. Sia $V \in \mathbb{C}$ un aperto connesso del piano complesso, g una funzione olomorfa definita su V, si può allora definire il grafico di g come

$$X = \{(z, g(z)) \mid z \in V\}$$

Dando a X la struttura di sottospazio di $\mathbb{C}^2$, posso introdurre in modo naturale una mappa di proiezione $\pi : X \to V$ che risulta essere un omeomorfismo, inoltre π è chiaramente una carta complessa su X ed è suriettiva. In questo modo X assume la struttura di superficie di Riemann con una sola carta. In generale, date $g_1, \ldots, g_n$ funzioni olomorfe

$$Y = \{(z, g_1(z), \ldots, g_n(z)) \mid z \in V\} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$$

è una superficie di Riemann.

Gli esempi fondamentale di Superfici di Riemann complesse sono la retta proiettiva, la sfera di Riemman , i tori complessi e le Curve Piane Affini e Proiettive.

La retta proiettiva complessa $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ diventa una Superficie di Riemann compatta usando come atlante quello definito dalle due carte affini usuali:

$$U_0 = \{(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \mid x_0 \neq 0\} \overset{\psi_0}{\to} \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$$

$$(x_0 : x_1) \mapsto \frac{x_1}{x_0}$$

$$U_1 = \{(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \mid x_1 \neq 0\} \overset{\psi_1}{\to} \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$$

$$(x_0 : x_1) \mapsto \frac{x_0}{x_1}$$

con inverse date da

$$\psi_0^{-1} : \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \to U_0 \qquad z \mapsto (1 : z)$$

$$\psi_1^{-1} : \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \to U_1 \qquad z \mapsto (z : 1)$$

L'unica mappa di transizione è data da

$$\psi_{0,1} = \psi_1 \circ \psi_0^{-1} : \psi_0(\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \setminus \{0\}) \to \psi_1(\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \setminus \{0\})$$

$$z \overset{\psi_0^{-1}}{\to} (1 : z) \overset{\psi_1}{\to} \frac{1}{z}$$

che è chiaramente olomorfa.

Nel caso della sfera, la proiezione stereografica dal polo nord identifica la sfera unitaria S^2 di $\mathbb{R}^3$ con $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ (identificato con il piano equatoriale reale) mandando il polo nord nel punto $\infty = (0:1)$.
Si osservi che la proiezione della sfera dal polo nord sul piano equatoriale ha inversa data da $z \mapsto \frac{1}{1+|z|^2}\binom{|z|^2-1}{2z}$ con $z \in \mathbb{C}$. La proiezione dal polo sud ha inversa data da $z \mapsto \frac{1}{1+|z|^2}\binom{1-|z|^2}{2z}$ e le due mappe inducono su $\mathbb{C}^*$ la mappa di transizione che manda z in $\frac{1}{\bar{z}}$. Dunque si tratta di un atlante antiolomorfo (basta comporre una delle due carte col coniugio per ottenere un atlante complesso e quindi una superficie di Riemann). Si può allora verificare che le due carte sono omeomorfismi usando come topologia su S^2 quella indotta dalla topologia di $\mathbb{R}^3$.

Per quanto riguarda i tori complessi è necessario introdurre il concetto di reticolo.

Definizione 1.7. *Siano w_1 e w_2 elementi di $\mathbb{C}$ linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$. Il* reticolo *generato da w_1 e w_2 è per definizione il sottogruppo abeliano di $\mathbb{C}$ generato da w_1 e w_2; si indica con $\mathbb{Z}_{w_1} \oplus \mathbb{Z}_{w_2}$, ed è formato da tutte le combinazioni a coefficienti interi dei due generatori.*

Si osservi che un reticolo è sempre un sottoinsieme discreto di $\mathbb{C}$ (per l'usuale topologia). Sia $\Lambda = \mathbb{Z}_{w_1} \oplus \mathbb{Z}_{w_2}$ un reticolo di $\mathbb{C}$; il toro T_Λ relativo a quel reticolo è lo spazio quoziente $\mathbb{C}/\Lambda$ dotato delle seguenti due strutture:

- la struttura di gruppo abeliano in quanto quoziente del gruppo additivo di $\mathbb{C}$;
- della topologia quoziente, ovvero $U \in T_\Lambda$ è aperto se, denotota con $\pi : \mathbb{C} \to T_\lambda$ la proiezione naturale, $\pi^{-1}(U)$ è aperto su $\mathbb{C}$.

È possibile introdurre una struttura di superficie di Riemann (compatta) definita nel seguente modo. Per ogni $z \in \mathbb{C}$, si definisca

$$P_z = \{z + \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 | \lambda_i \in [0,1]\}$$

Ogni punto di $\mathbb{C}$ è congruente ad un punto di P_z modulo Λ, la restrizione della proiezione $\pi|_{P_z} : P_z \to T_\lambda$ risulta, infatti, suriettiva a causa della struttura quoziente.
Λ è un sottoinsieme discreto di $\mathbb{C}$ allora $\exists \epsilon > 0$ tale che $|\omega| > 2\epsilon$ $\forall \omega \neq 0$, $\omega \in \Lambda$. Fisso ϵ e $z_0 \in \mathbb{C}$, e considero il disco $D = D(z_0, \epsilon)$. La scelta di ϵ fatta comporta che, scelti due punti qualsiasi in D, essi non possono differire di elementi del reticolo, ovvero sono all'interno dello stesso P_z. La proiezione ristetta a D è un omeomorfsmo sull'immagine $\pi(D)$: è aperta

per definizione, suriettiva e continua perché π lo è; inoltre è iniettiva per la scelta di ϵ.
Ora posso definire l'atlante complesso su T_Λ: si fissi ϵ come sopra e $z_0 \in \mathbb{C}$, considero $D_{z_0} = D(z_0, \epsilon)$ e definisco $\xi_{z_0} : \pi(D_{z_0}) \to D_{z_0}$ come l'inversa della mappa $\pi|_{D_{z_0}}$. Per quanto detto ξ_i sono carte complesse su T_Λ. Ora l'unico controllo rimasto è la compatibilità: siano z_1 e z_2 due punti in $\mathbb{C}$ e siano $\xi_{z_1} : \pi(D_{z_1}) \to D_{z_1}$ e $\xi_{z_2} : \pi(D_{z_2}) \to D_{z_2}$ le carte associate. Sia $U = \pi(D_{z_1}) \cap \pi(D_{z_2})$, se U fosse vuoto non c'è nulla da dimostrare. $U \neq \emptyset$, sia allora $T(z) = \xi_2(\xi_1^{-1}(z)) = \xi_2(\pi(z))$ per $z \in \xi_1(U)$, devo mostrare che T è un olomorfismo su $\xi_1(U)$. Si ha che $\pi(T(z)) = \pi(z)$ per ogni $z \in \xi_1(U)$, allora $T(z) - z = \omega(z) \in \Lambda$ per ogni $z \in \xi_1(U)$. La funzione $\omega(z) : \xi_1(U) \to \Lambda$ è continua e quindi essendo Λ discreto, è localmente costante, quindi olomorfa. Allora $T(z) = z + \omega$ è olomorfa. In generale, le mappe di transizione sono l'identità o una traslazione in $\mathbb{C}$.

Per concludere questo insieme di esempi, passiamo alla descrizione di alcune Curve Algebriche che sono superfici di Riemann.

Definizione 1.8. *Una* Curva Piana Affine *è il sottoinsieme di* $\mathbb{C}^2$ *costituito dagli zeri di un polinomio* $f(z,w)$*:*

$$X = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid f(z,w) = 0\}$$

Il polinomio $f(z,w)$ *è non singolare in una radice* p *se entrambe le derivate parziali,* $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial f}{\partial w}$ *sono non nulle in* p*, analogamente la curva* X *è detta non singolare o liscia se il polinomio che la defisce è non singolare per ogni* $p \in X$*.*

Introdurre delle carte locali su X e descrivere la struttura locale è relativamente semplice sfruttando il teorema della funzione implicita, a patto che X sia liscia: in tal modo, infatti, posso garantire che le derivate parziali non si annullino mai in contemporanea e quindi applicando il teorema posso far vedere X localmente come grafico di una funzione olomorfa. Inoltre X è uno spazio di Hausdorff e vale il secondo assioma di numerabilità. Quindi per poter affermare che X è una superficie di Riemann mi occorre verificarne la connessione. Ora se il polinomio che definisce X fosse riducibile, non è detto che X sia connessa, vale infatti il seguente:

Teorema 1.2. *Se* $f(z,w)$ *è un polinomio irriducibile, allora l'insieme dei suoi zeri,* X*, è connesso e quindi è una Superficie di Riemann.*

La costruzione delle Curve Piane Affini lisce permette di considerare agevolmete il caso del piano proiettivo $\mathbb{P}^2$. Ricordo che $\mathbb{P}^2$ è lo spazio quoziente di $\mathbb{C}^3 \backslash 0$ rispetto all'azione moltiplicativa di $\mathbb{C}^*$.
Ora sia $F(x,y,z)$ un polinomio omogeneo di grado d, chiaramente non ha senso valutare F in un punto del piano proiettivo dato che $F(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0) =$

$\lambda^d F(x_0, y_0, z_0)$ e $[\ \lambda x_0 : \lambda y_0 : \lambda z_0\ ] = [\ x_0 : y_0 : z_0\ ]$. Ad ogni modo, è sempre possibile considerare $X = \{\ [x : y : z] \in \mathbb{P}^2 \mid F(x, y, z) = 0\ \}$ che è la Curva Piana Proiettiva definita da F.

Definizione 1.9. *Un polinomio omogeneo $F(x, y, z)$ è* non singolare *se non ci sono soluzioni contemporanee di $F(p) = \frac{\partial F}{\partial x}(p) = \frac{\partial F}{\partial y}(p) = \frac{\partial F}{\partial z}(p) = 0$ per ogni $p \in \mathbb{P}^2$.*

In particolare posso considerare le intersezioni di X con gli aperti di $\mathbb{P}^2$ omeomorfi a $\mathbb{C}^2$, del tipo $U_i = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 | x_i \neq 0\}$, ottenendo ad esempio per la prima coordinata:

$$X_0 = X \cap U_0 = \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 \mid F(1, a, b) = 0\}$$

Analogamente a quanto detto per le Curve Piane Affini si può affermare che:

Definizione 1.10. *Se $F(x, y, z)$ è un polinomio omogeneo di grado d, allora F è* non singolare *se e solo se ogni $X_i = X \cap U_i$ è una Curva Piana Affine liscia. In particolare X è una superficie di Riemann compatta ed ogni punto di X può essere preso come rapporto in coordinate locali delle coordinate omogenee. Si definisce* grado *di X il grado del polinomio F.*

Ora passiamo a trasportare i concetti di funzione olomorfa e meromorfa alle superfici di Riemann.

1.3 Funzioni olomorfe e meromorfe su Superfici di Riemann e il Teorema di Riemann-Hurwitz

Definizione 1.11. *Una funzione f definita su una Superficie di Riemann S si dice* olomorfa *(risp.* meromorfa*) nel punto $p \in S$ se esistono un aperto U di S contente p e una carta $\varphi : U \to V$ (V aperto di $\mathbb{C}$) tale che $f \circ \varphi^{-1}$, sia olomorfa (risp. meromorfa) nel punto $z = \varphi(p)$. La funzione si dice olomorfa (risp. meromorfa) se lo è in ogni punto di S. L'insieme delle funzioni olomorfe su S si indica con $\mathcal{O}(S)$ ed ha chiaramente struttura d'anello (somma e prodotto definiti puntualmente su S). L'insieme delle funzioni meromorfe su S si indica con $\mathcal{M}(S)$ ed ha chiaramente struttura di campo.*

Vi sono alcune considerazioni che discendono subito dalle proprietà delle funzioni olomorfe sugli aperti di $\mathbb{C}$:

- Principio di identità: una funzione olomorfa (risp. meromorfa) è identicamente nulla se e solo se si annulla su un insieme con un punto di accumulazione. Due funzioni olomorfe (risp. meromorfe) sono uguali se e solo se coincidono su un insieme con un punto di accumulazione;

- Discretezza di zeri e poli: se una funzione olomorfa su S è non nulla, allora l'insieme degli zeri è discreto. Se una funzione meromorfa su S è non nulla, allora l'insieme degli zeri e l'insieme dei poli sono entrambi discreti;
- Massimo modulo: una funzione olomorfa il cui modulo ammetta massimo relativo è costante nella componente connessa del massimo;
- Se S è compatta, allora ogni funzione olomorfa è costante, cioè $\mathcal{O}(S) = \mathbb{C}$. Infatti il modulo ammette massimo, ed S è connessa. Invece le funzioni meromorfe non sono necessariamente banali.

L'ordine di una funzione (olomorfa o meromorfa) in $p \in S$ si definisce usando una qualsiasi carta in un intorno di p; se f è una funzione su S, $ord_p f$ è intero positivo, nullo o negativo a seconda che f abbia valore nullo, non nullo o polo in p. In particolare:

- $ord_p(fg) = ord_p(f) + ord_p(g)$,
- $ord_p(\frac{1}{f}) = -ord_p(f)$,
- $ord_p(fg) \geq min\{ord_p(f), ord_p(g)\}$ (e vale l'uguaglianza se sono diversi).

Definizione 1.12. *Una funzione $f : S \to S'$ tra Superfici di Riemann si dice* olomorfa *nel punto $p \in S$ se esistono un aperto U di S contente p e una carta $\varphi : U \to V$ (V aperto di $\mathbb{C}$) un aperto U' di S' contenente $p' = f(p)$ e una carta $\varphi' : U' \to V'$(V' aperto di $\mathbb{C}$) tale che $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}$ sia olomorfa nel punto $z = \varphi(p)$. La funzione si dice* olomorfa *se lo è in ogni punto di S. Indicheremo con $\mathcal{O}(S, S')$ le applicazioni olomorfe da S in S'.*

Definizione 1.13. *Due Superficie di Riemann sono* isomorfe *(o* biolomorfe*) se esiste una mappa olomorfa tra loro che sia invertibile e la cui inversa sia una mappa olomorfa.*

Forma locale di mappe olomorfe. *Data la funzione $f : S \to S'$ olomorfa in $p \in S$, è sempre possibile trovare una carta $\varphi : U \to V$ con V aperto di $\mathbb{C}$, U aperto di S contenente p, e una una carta $\varphi' : U' \to V'$ con V' aperto di $\mathbb{C}$, U' aperto di S' contenente $f(p)$, tale che $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = z^m$ con $m \in \mathbb{N}$.*

Esistono dei chiari legami fra funzioni olomorfe e meromorfe:

Proposizione 1.3. *Si supponga f meromorfa in p. Allora f è olomorfa in p se e solo se $ord_p(f) \geq 0$. In questo caso $f(p) = 0$ se e solo se $ord_p(f) > 0$, f ha un polo in p se e solo se $ord_p(f) < 0$. Se infine $ord_p(f) = 0$, f non ha nè polo nè uno zero in p.*

Passiamo a presentare alcuni esempi di mappe olomorfe. Ogni carta complessa è olomorfa sul suo dominio.
Una funzione complessa f definita sulla sfera di Riemann è olomorfa in ∞ se e solo se $f(\frac{1}{z})$ è olomorfa in 0, quindi se e solo se f è razionale: $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ e $deg(p) \leq deg(q)$.
Sul toro complesso, invece, una funzione complessa è olomorfa su un aperto $W \subset X = \mathbb{C}/\Lambda$ se e solo se esiste z controimmagine di $p \in X$ tale che, detta π la proiezione, $f \circ \pi$ è olomorfa in z.

Considerazioni analoghe valgono per le funzioni meromorfe, in particolare vale che:

Teorema 1.3. *Ogni funzione meromorfa sulla Sfera di Riemann è una funzione razionale, viceversa ogni funzione razionale è meromorfa sulla sfera di Riemann.*

Dimostrazione. Sia f meromorfa su $\mathbb{C}^\infty$, ovvero la sfera di Riemann. Dal fatto che $\mathbb{C}^\infty$ è compatta segue che f ha un numero finito di zeri e di poli. Considero allora $A = \{\lambda_i\}$, l'insieme degli zeri e poli di f in $\mathbb{C}$, assumo che $ord_{z=\lambda_i}(f) = e_i$. Considero:

$$r(z) = \prod (z - \lambda_i)^{e_i}$$

che è una funzione che ha gli stessi zeri e poli di f. Dunque su $\mathbb{C}\backslash A$ la funzione $r(z)$ non si annulla mai e non ha poli, quindi la funzione $g(z) = \frac{f(z)}{r(z)}$ è meromorfa su $\mathbb{C}^\infty$. Inoltre g non ha poli nè zeri in $\mathbb{C}$ e quindi sviluppabile in serie di Taylor:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

convergente ovunque su $\mathbb{C}$. Ma g è anche meromorfa in $z = \infty$ ed usando le coordinate $w = \frac{1}{z}$ in ∞ si ottiene

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^{-n}$$

e quindi per essere meromorfa in $w = 0$ deve accadere che g abbia un numero finito di termini, cioè sia di forma polinomiale in z. Ora se il polinomio g non fosse costante dovrebbe avere uno zero in $\mathbb{C}$, il che è una contraddizione. Dal fatto che $\frac{f(z)}{r(z)}$ è costante si ha che f è una funzione razionale.
Il viceversa è banale e segue dal fatto che una funzione razionale è sempre meromorfa. □

Corollario 1.3.1. *Se f è meromorfa sulla sfera di Riemann allora*

$$\sum_p ord_p(f) = 0$$

Dimostrazione. Si vede facilmente che per una funzione razionale vale l'enunciato, in particolare poiché ogni f meromorfa è razionale, segue l'assunto. $\square$

Per definire funzioni meromorfe sul toro occorre prima definire le Funzioni Theta, $\theta(z)$. A tal proposito si consideri il toro $X = \mathbb{C}/\Lambda$ dove Λ assume, per semplicità, la forma: $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$, dove $\tau \in \mathbb{C}^*$ e $\mathcal{I}m(\tau) > 0$ e si definisca

$$\theta(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i [n^2 \tau + 2\, n\, z]}$$

Le Funzioni Theta presentano varie proprietà su cui non ci soffermeremo dato che esulano dallo scopo della trattazione, riportiamo comunque il seguente teorema di cui non diamo la dimostrazione.

Teorema 1.4. *Fissato un intero positivo d e scelti due insiemi $\{x_i\}$ e $\{y_i\}$ tali che $\sum_i x_i - \sum_j y_j \in \mathbb{Z}$ allora il quoziente delle Funzioni Theta traslate*

$$R(z) = \frac{\prod_i \theta^{x_i}(z)}{\prod_j \theta^{y_j}(z)}$$

è una funzione meromorfa, Λ-periodica su $\mathbb{C}$ e quidi meromorfa su $X = \mathbb{C}/\Lambda$.

Per quanto riguarda, invece, le Curve Piane Affini liscie, applicando il teorema 'Nullstellensatz' di Hilbert si possono caratterizzare le funzioni meromorfe definite su di esse e analogamente sulle Curve Piane Proiettive:

Proposizione 1.4. *Sia X una Curva Piana Affine liscia definita da un polinomio irriducibile non singolare $f(x, y) = 0$. Allora ogni quoziente di polinomi $r = \frac{g(x,y)}{h(x,y)}$ è una funzione meromorfa su X se f non divide il denominatore h. Nel caso proiettivo, sia Y una Curva Piana Proiettiva liscia definita da un polinomio omogeneo non singolare irriducibile $F(x, y, z) = 0$, una funzione meromorfa su Y è data da $R = \frac{G(x,y,z)}{H(x,y,z)}$ dove G e H sono polinomi omogenei dello stesso grado ed F non divide H.*

Ora tornando a cosiderazioni generali, possiamo analizzare il comportamento delle funzioni olomorfe fra superfici di Riemann, innanzitutto osserviamo che se X è compatta ed $F : X \to Y$ è una funzione olomorfa non costante, allora Y è compatta e F è suriettiva.

Proposizione 1.5. *Sia $F : X \to Y$ una mappa olomorfa fra superfici di Riemann, allora $\forall y \in Y$, $F^{-1}(y)$ è un sottoinsieme discreto di X. Se X, Y sono compatte allora $F^{-1}(y)$ è un sottoinsieme finito non vuoto $\forall y \in Y$.*

Ora si può indurre una corrispondenza 1-1 fra

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{funzioni meromorfe} \\ \text{su X} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{mappe olomorfe } F : X \to \mathbb{C}^{\infty} \\ \text{non identicamente } \infty \end{array} \right\}$$

definita in modo naturale: sia f una mappa meromorfa su X, i valori che tale funzione può assumere sono numeri complessi ad eccezione dei poli di f, dove il valore è '∞'. In questo modo posso definire una funzione $F : X \to \mathbb{C}^\infty$ come

$$F(x) = \begin{cases} f(x) \in \mathbb{C} & \text{se } x \text{ non è un polo di } f \\ \infty & \text{se } x \text{ è polo} \end{cases}$$

Definizione 1.14. *Si dice* molteplicità *di f in p il naturale m, esponente della forma normale associata ad f e si indica con $molt_p(f)$. La molteplicità si può calcolare come l'ordine di annullamento nel punto della derivata di una forma locale, aumentato di 1.*

Si osservi che per una funzione meromorfa su S, pensata come funzione olomorfa da S in $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, vale che $molt_p(f) = ord_p(f)$ se p non è polo, e $molt_p(f) = -ord_p(f)$ se p è un polo.
Supponiamo S ed S' Superfici di Riemann compatte. Si può dimostrare che per ogni punto $p' \in S'$, la somma delle molteplicità

$$\sum_{p: f(p)=p'} molt_p(f)$$

è indipendente da p', e con tale somma si definisce il grado di f che si indica con $deg(f)$.
Come conseguenza, si vede che ogni funzione olomorfa f tra Superfici di Riemann compatte è un rivestimento ramificato con $deg(f)$ fogli, e sono punti di ramificazione solo i punti di $p \in S$ con $molt_p(f) > 1$, con $r_p(f) = molt_p(f) - 1$.

Definizione 1.15. *Una mappa continua $f : X \to Y$ fra superficie reali è detta un* rivestimento *(con n fogli)* ramificato *(lungo E sottinsieme finito di X) se valgono le seguenti condizioni:*

- *f è suriettiva, chiusa e a fibre finite;*
- *Sia $B = f(E)$, allora f ristretta a $X \backslash f^{-1}(B) \to Y \backslash B$ è rivestimento (con n fogli), cioè per ogni $y \in Y \backslash B$ esiste un intorno aperto V tale che $f^{-1}(V)$ è unione disgiunta di n aperti omeomorfi a V tramite f.*

Si noti dalla definizione che per ogni $y \in Y$ si ha che la fibra $f^{-1}(y)$ è finita, con esattamente n elementi se $y \notin f(E) = B$. Denotiamo con $d(f)$ il numero di fogli del rivestimento $X \backslash f^{-1}(B) \to Y \backslash B$.
Per ogni $x \in X$ e per ogni intorno U sufficientemente piccolo di x abbiamo che la restrizione $f|U : U \to f(U)$ è un rivestimento fuori di x; definiamo $e_{x,U}(f)$ il numero di fogli di $f|U$. Diciamo che il punto x è semplice se $e_x(f) = 1$, di ramificazione altrimenti. Definiamo la ramificazione di f in x come

$$ram_x(f) = e_x(f) - 1$$

dunque nulla se il punto è semplice.

Teorema di Riemann-Hurwitz. *Se $f : X \to Y$ è un rivestimento ramificato di superficie reali compatte orientabili, allora vale la seguente relazione tra le caratteristiche di Eulero-Poincaré:*

$$\mathcal{X}(X) = d(f)\ \mathcal{X}(Y) - ram(f)$$

e dunque tra i generi:

$$g(X) = e(f)(g(Y) - 1) + \frac{1}{2}ram(f) + 1$$

Poiché $d(f) \geq 1$ e $ram(f) \geq 0$, abbiamo che $g(X) \geq g(Y)$, e dunque non possono esistere mappe olomorfe da superficie di genere minore a superficie di genere maggiore. In particolare non esistono mappe olomorfe dalla sfera al toro.
Se $g(X) = 1 = g(Y)$, allora necessariamente $ram(f) = 0$, dunque una mappa olomorfa dal toro sul toro non è mai ramificata.
Se $g(X) = g(Y) > 1$, allora necessariamente $e(f) = 1$ ed f è un isomorfismo. Nel caso che $g(Y) = 0$ (rivestimenti della sfera) la formula diviene particolarmente facile e utile: $g(X) = 1 - d(f) + \frac{ram(f)}{2}$.

Proposizione 1.6. *Per ogni Superficie di Riemann, X, compatta e per ogni funzione meromorfa vale che $\sum_P ord_P(f) = 0$.*

Dimostrazione. Sia F la funzione olomorfa $F : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ corrispondente a f. Si ha quindi che:

$$\begin{aligned} \sum_{P \in X} ord_P f &= \sum_{\{P \in X\colon f(P)=0\}} molt_P(F) - \sum_{\{P \in X\colon P \text{ è polo}\}} molt_P(F) = \\ &= deg(F) - deg(F) = 0 \end{aligned}$$

□

È utile osservare che mappe olomorfe tra Superfici di Riemann compatte sono isomorfismi se e solo se sono di grado 1 (cioè rivestimenti con un foglio, nel qual caso non hanno ramificazione).

Capitolo 2

Forme differenziali

2.1 1-forme $\mathcal{C}^\infty$

Sia X una Superficie di Riemann, definiamo le 1-forme differenziali C^∞ su X come:

Definizione 2.1. *Una* 1-forma complessa ω *definita su* $U \subset X$ *aperto si dice* 'differenziabile' *o* $\mathcal{C}^\infty$ *se è della forma:*

$$\omega = f\,dz + g\,d\bar{z} \quad con\ f, g \in \mathcal{C}^\infty(U)$$

Lo spazio delle 1-forme differenziabili su U si indica con $\mathcal{E}^1(U)$*. Una 1-forma* $\omega \in \mathcal{E}^1(U)$ *si dice di tipo '(1,0)' o di tipo '(0,1)' se è della forma*

$$f\,dz\ con\ f \in \mathcal{C}^\infty(U)\ \ rispettivamente$$

$$g\,d\bar{z}\ con\ f \in \mathcal{C}^\infty(U)$$

Gli spazi delle 1-forme (0,1) e (1,0) si indicano rispettivamente con $\mathcal{E}^{0,1}(U)$ *e* $\mathcal{E}^{1,0}(U)$*.*

Per completare la notazione introdotta, si denota con $\mathcal{E}^0(U)$ o con $\mathcal{E}(U)$ lo spazio delle funzioni complesse $\mathcal{C}^\infty$ a valori in U. Quanto appena esposto può essere riportato alle Superfici di Riemann in modo naturale:

Definizione 2.2. *Sia* X *una Superficie di Riemann, una* 1-forma $\mathcal{C}^\infty$ *su* X *è una famiglia di 1-forme differenziabili* $\{\omega_\varphi\}$ *una per ogni carta* $\varphi_i : U_i \to V_i$*, dove viene assegnata la variabile* z_i*, tale che se* $U_j \cap U_i \neq \emptyset$ *, con* $j \neq i$ *, allora* ω_{φ_j} *si trasforma in* ω_{φ_i} *secondo la mappa olomorfa di cambio di coordinate* $T = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$*.*

Questo significa che se z_1 è la variabile su V_1 e z_2 la variabile su V_2, ed ho che $z_1 = T(z_2)$ le forme

$$\omega_1 = f_1(z_1, \bar{z_1})dz_1 + g_1(z_1, \bar{z_1})d\bar{z_1}$$

$$\omega_2 = f_2(z_2, \bar{z_2})dz_2 + g_2(z_2, \bar{z_2})d\bar{z_2}$$

si trasformano l'una nell'altra tramite il cambio di coordinate:

$$f_2(z_2, \bar{z_2}) = f_1(T(z_2), \overline{T(z_2)})T'(z_2)$$

$$g_2(z_2, \bar{z_2}) = g_1(T(z_2), \overline{T(z_2)})T'(z_2)$$

Quanto descritto avviene per ogni coppia di indici al variare delle carte dell'atlante di X.

Lemma 2.1. *Sia X una Superficie di Riemann ed $\mathcal{A}$ un atlante complesso su X, ovvero una famiglia $\mathcal{A} = \{\phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \mid \alpha \in I\}$ di carte compatibili a due a due i cui domini coprono X. Si supponga che siano date 1-forme differenziabili per ogni carta di $\mathcal{A}$ e che queste si trasformino una nell'altra nei domini comuni, allora esiste un'unica 1-forma $\mathcal{C}^\infty$ su X che estende ogni 1-forma locale.*

Conviene fare subito una serie di osservazioni. Non è detto che per una forma differenziale su X si possa trovare una descrizione globale, cioè usando X come unico aperto. Però, ogni forma differenziale è definita (se esiste) dalla sua espressione in qualunque carta (per il principio di identità analitico: due differenziali coincidono se coincidono su un insieme con un punto di accumulazione). Per esempio $exp(z)dz$ è una forma differenziale su $\mathbb{C}$, ma non definisce alcun differenziale su $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Analogamente $\sqrt{z}dz$ è differenziale su $\mathbb{C}$ privato di una semiretta per l'origine, ma non definisce alcun differenziale su $\mathbb{C}$ privato dell'origine.

Una forma ω si dice esatta se esiste $f : X \to \mathbb{C}$ tale che f sia differenziabile con $\omega = df$; in tal caso f si dice primitiva di ω. La forma, invece, si dice chiusa se il suo differenziale è nullo. Lo spazo vettoriale delle forme complesse chiuse modulo le forme esatte si indica con $H^1_{\mathbb{C}}(X)$ e coincide con il primo gruppo di coomologia di De Rham di X.

Proposizione 2.1. *Sia X una Superficie di Riemann, allora valgono i seguenti fatti:*

- *Ogni forma chiusa è localmente esatta.*

- *Se X è semplicemente connessa ogni forma chiusa è esatta, quindi $H^1_{\mathbb{C}} = \{0\}$.*

- *Se ω è una forma chiusa e α_1, α_2 sono due cammini omologhi in X allora:*
$$\int_{\alpha_1} \omega = \int_{\alpha_2} \omega$$

in particolare è ben definito $\int_{[\alpha]} \omega$ con $[\alpha] \in H_1(X)$. Gli integrali che si ottengono al variare della classi in $H_1(X)$ si dicono periodi di ω.

- *Una forma chiusa è esatta se e solo se tutti i suoi periodi sono nulli.*

A partire dalle considerazioni appena svolte, è chiaro che è ben definita la mappa:

$$\Psi : H^1_{\mathbb{C}}(X) \to Hom(H^1(X), \mathbb{C}) \quad [\omega] \mapsto v_\omega \text{ con } v_\omega([\alpha]) = \int_\alpha \omega$$

che risulta essere $\mathbb{C}$ lineare ed iniettiva per la proposizione precedente.

Ora passo ad introdurre una classe particolare di forme differenziabili complesse che si possono definire su una Superficie di Riemann e ne riflettono la struttura analitica.

2.2 1-forme olomorfe e meromorfe, 2-forme differenziali

Definizione 2.3. *Una* 1-forma olomorfa *su un aperto $V \subset \mathbb{C}$ è un'espressione ω della forma $\omega = f(z)dz$ dove f è una funzione olomorfa su V.*

Ovviamente per rappresentare questo tipo di oggetti sulle Superfici di Riemann devo dare condizioni sulle carte complesse e sulla loro compatibilità:

Definizione 2.4. *Sia ω_1 una 1-forma olomorfa in z, definita su un aperto V_1, $\omega_1 = f(z)dz$; sia ω_2 un'altra 1-forma olomorfa in x, definita su un aperto V_2, $\omega_2 = g(x)dx$, e sia infine T una mappa olomorfa fra V_1 e V_2 tale che $z = T(x)$. Allora si dice che ω_1 si trasforma in ω_2 secondo T se $g(x) = f(T(x))T'(x)$.*

Dalla definizioni seguono alcune osservazioni:

- $g(x) = f(T(x))T'(x)$ inoltre $\omega_1 = f(z)dz$ e $\omega_2 = g(x)dx$ quindi $\omega_2 = g(x)dx = f(T(x))T'(x)dx = f(z)dz = \omega_1$ ma ciò accade se e solo se $dz = T'(x)dx$, come deve essere, dal momento che $z = T(x)$.

- Se T è invertibile con funzione inversa S, allora ω_1 si trasforma in ω_2 secondo T se e solo se ω_2 si trasforma in ω_1 secondo S.

Le definizioni date di 1-forma olomorfa posso essere estese in modo naturale su una generica Superficie di Riemann:

Definizione 2.5. *Sia X una Superficie di Riemann,* una 1-forma olomorfa su X *è una famiglia di 1-forme olomorfe $\{\omega_\phi\}$ una per ogni carta $\phi : U \to V$ nelle coordinate del codominio V, tale che se due carte $\phi_i : U_i \to V_i$ $i = 1, 2$ hanno domini che si sovrappongono allora ω_{ϕ_1} si trasforma in ω_{ϕ_2} secondo la mappa olomorfa di cambio di carte $T = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$.*

Si può dimostrare, come nel caso delle forme C^∞, il seguente risultato sulle 1-forme olomorfe su Superfici di Riemann:

Lemma 2.2. *Sia X una Superficie di Riemann ed $\mathcal{A}$ un atlante complesso su X. Si supponga che siano date 1-forme olomorfe per ogni carta di $\mathcal{A}$ e che queste si trasformino una nell'altra nei domini comuni. Allora esiste un'unica 1-forma olomorfa su X che estende ciascuna di queste 1-forme olomorfe definite sulle carte dell'atlante.*

In modo del tutto analogo è possibile definire le 1-forme meromorfe sulle Superfici di Riemann: bisogna solo porre l'accento sul fatto che la funzione che si utilizza deve essere, ovviamente, meromorfa e nella definizione della condizione di compatibilità delle forme è necessario avere un operatore T che sia olomorfo nelle coordinate.

Passiamo quindi a definire le forme meromorfe sul piano complesso e poi a trasportare il concetto su una generica superficie di Riemann.

Definizione 2.6. *Una* 1-forma meromorfa *su un aperto $V \subset \mathbb{C}$ è un'espressione ω della forma $\omega = f(z)dz$ dove f è una funzione meromorfa definita su V e z è la coordinata locale utilizzata.*

Definizione 2.7. *Sia ω_1 una 1-forma meromorfa su un aperto $V_1 \subset \mathbb{C}$ della forma $\omega_1 = f(z)dz$, dove f è una funzione meromorfa definita su V, su cui z è la coordinata locale utilizzata; sia inoltre ω_2 un'altra 1-forma meromorfa definita su un aperto $V_2 \subset \mathbb{C}$ tale da avere la forma $\omega_2 = g(w)dw$, dove g è meromorfa e definita su V_2 con w come coordinata locale. Sia, inoltre, $z = T(w)$, dove T è una mappa olomorfa da V_2 a V_1. Diciamo che ω_1 si trasforma in ω_2 secondo T se $g(w) = f(T(w))T'(w)$.*

Definizione 2.8. *Sia X una Superficie di Riemann, una* 1-forma meromorfa su X *è una famiglia di 1-forme meromorfa $\{\omega_\vartheta\}$ una per ogni carta $\vartheta : U \to V$ nelle coordinate del codominio V, tale che se due carte $\vartheta_i : U_i \to V_i$ con $i = 1, 2$ hanno domini che si sovrappongono allora ω_{ϑ_1} si trasforma in ω_{ϑ_2} secondo la mappa olomorfa di cambio di carte $T = \vartheta_1 \circ \vartheta_2^{-1}$.*

È possibile dimostrare, come nel caso delle forme C^∞ e delle forme olomorfe, il seguente risultato:

Lemma 2.3. *Sia X una Superficie di Riemann ed $\mathcal{A}$ un atlante complesso su X(se necessario si può, senza alcuna complicazione, supporre l'atlante massimale). Si supponga che siano date 1-forme meromorfe per ogni carta* *di $\mathcal{A}$ e che queste si trasformino una nell'altra nei domini comuni, allora esiste un'unica 1-forma meromorfa su X che estende ciascuna di queste 1-forme definite localmente.*

Lo spazio delle 1-forme olomorfe si denota con $\Omega^{1,0}(U)$ o semplicemente con Ω^1, mentre quello delle 1-forme meromorfe con $\mathcal{M}^1(U)$.
Se ω è un differenziale meromorfo su X, e f una funzione meromorfa, allora $f\omega$ è un differenziale meromorfo, basta controllarne il comportamento sulle mappe di transizione. Viceversa si può affermare che:

Lemma 2.4. *Il rapporto tra due differenziali meromorfi è una funzione meromorfa.*

Dimostrazione. Siano $\phi : U \to V$ una carta locale su X con coordinata z nell'aperto V; ω_1 , ω_2 differenziali meromorfi su X della forma $\omega_i = g_i(z)dz$ con $i = 1, 2$ dove g_i sono funzioni meromorfe su V e sia $h = \frac{g_2}{g_1}$. Chiaramente h è una funzione meromorfa su V, sia quindi $f = h \circ \phi$, f è una funzione meromorfa. Si può dimostrare che f è una funzione meromorfa globale, cioè indipendente dalle coordinate, ovvero $f \in \mathcal{M}(X)$. E quindi si può scrivere $\omega_1 = f\omega_2$. □

Quindi, noto un differenziale meromorfo su una Superficie di Riemann, tutti gli altri si ottengono moltiplicando quello noto per funzioni meromorfe. Cioè abbiamo una biiezione $\mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}^1(X)$ mandando f in $f\omega_0$, ove ω_0 è qualunque elemento di $\mathcal{M}^1(X)$. Analoghe affermazioni sono false per i differenziali olomorfi.

In analogia a quanto detto, è possibile definire le 1-forme antiolomorfe come espressioni del tipo: $\mu = \overline{g(z)}d\bar{z}$ dove g è una funzione olomorfa, lo spazio vettoriale complesso associato si indica con: $\Omega^{0,1}(U)$. Per le formule di Cauchy-Riemann forme olomorfe e antiolomorfe sono chiuse. Inoltre una forma olomorfa è esatta quando esiste una funzione olomorfa h tale che $\omega = dh$; ora se X è compatta le uniche funzioni olomorfe sono le costanti e quindi $\omega = 0$. Analogamente per le forme antiolomorfe. Chiaramente si ha che: $\Omega^{0,1}(X) \cap \Omega^{1,0}(X) = \emptyset$ e $\Omega^{0,1}(X)$ e $\Omega^{1,0}(X)$ sono sottospazi vettoriali complessi di $H^1_{\mathbb{C}}$; inoltre l'operatore di coniugio, che manda ogni elemento nel coniugato, rappresenta un isomorfismo fra questi spazi vettoriali. Un'importante relazione fra forme differenziabili e forme olomorfe è data dal seguente:

Teorema 2.1. *Sia X una Superficie di Riemann compatta di genere g, allora $dim\,\Omega^{1,0}(X) = dim\,\Omega^{0,1}(X) = g$, ovvero $H^1_{\mathbb{C}} = \Omega^{1,0}(X) \oplus \Omega^{0,1}(X)$.*

Passiamo ora a caratterizzare meglio le forme:

Definizione 2.9. *Sia ω una 1-forma differenziale a cui è associata l'espressione: $\omega = f(z)dz$, l'*ordine *di ω in $p \in X$ è l'ordine di f in* 0.

Si può vedere che l'ordine è ben definito e indipendente dalla scelta delle coordinate locali. Una 1-forma meromorfa è olomorfa in p se e solo se $ord_p(\omega) \geq 0$ inoltre p è uno zero di ω o un polo di ordine n se si ha rispettivamente $ord_p(\omega) = n > 0$ e $ord_p(\omega) = -n < 0$.
Si dice grado di un differenziale la somma estesa a tutti i punti di X degli ordini. Il grado è ben definito, essendo gli ordini nulli in quasi tutti i punti. Ora poiché la somma degli ordini di ogni funzione meromorfa è zero, ne risulta che tutti i differenziali su una Superficie di Riemann compatta hanno lo stesso grado.

Ovviamente esitono forme differenzibili che sono olomorfe . Si può vedere che una forma $\mathcal{C}^\infty$ di tipo $(1,0)$ è localmente della forma $f(z,\bar{z})dz$ mentre di tipo $(1,0)$ assume la forma $g(z,\bar{z})d\bar{z}$. In particolare ogni forma olomorfa è di tipo $(1,0)$. Bisogna, infine, notare che se è data una funzione $h \in \mathcal{C}^\infty(X)$ ed una 1-forma differenziabile, si ha che $h\omega$ è ancora una 1-forma differenzibile tale che se ω è nella forma $w = f\,dz + g\,d\bar{z}$, $h\omega$ assume la forma: $h\omega = hf\,dz + hg\,d\bar{z}$. In particolare si ha che:

- se ω è di tipo $(1,0)$ anche $h\omega$ lo è;
- se ω è di tipo $(0,1)$ anche $h\omega$ è $(0,1)$;
- se ω e h sono olomorfe, anche $h\omega$ è olomorfa;
- se ω e h sono meromorfe, allora $h\omega$ è meromorfa;
- se ω e h sono meromorfe in $p \in X$, $ord_p(h\omega) = ord_p(h) + ord_p(\omega)$.

Definizione 2.10. *Una* 2-forma $\mathcal{C}^\infty$ *su un aperto* $V \in \mathbb{C}$ *è un'espressione* η *della forma* $\eta = f(z,\bar{z})dz \wedge d\bar{z}$ *dove* $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$.

Anche in questo caso esiste una condizione di compatibilità:

Definizione 2.11. *Date due 2-forme* $\mathcal{C}^\infty$, $\eta_1 = f(z,\bar{z})\ dz \wedge d\bar{z}$ *e* $\eta_2 = g(w,\bar{w})\ dw \wedge d\bar{w}$ *definite su due aperti* V_1 *e* V_2*, e una mappa olomorfa fra tali aperti,* T*, tale che* $z = T(w)$*, allora si dice che* η_1 *si trasforma in* η_2 *secondo* T *se* $g(w,\bar{w}) = f(T(w),\bar{T(w)})\ \|T'(w)\|^2$.

Sfruttando la condizione appena data e procedendo in maniera del tutto analoga a prima posso definire le 2-forme $\mathcal{C}^\infty$ su X Superficie di Riemann. Di nuovo ho l'esistenza di una 2-forma differenziabile su tutta la superficie che estende le singole carte locali.

2.3 Esempi

A questo punto conviene esporre alcuni esempi di differenziali.

Su $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ consideriamo il differenziale dz definito sulla carta $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}\backslash\infty$. Naturalmente si ha $ord_p(dz) = 0$ per ogni $p \neq \infty$. Per controllare il comportamento su ∞, usiamo la mappa di transizione $z \to \frac{1}{z}$, e otteniamo che $ord_\infty(dz) = ord_0(d\frac{1}{z}) = ord_0(\frac{1}{z^2}dz) = -2$ e quindi concludiamo che dz ha grado -2. Si tratta di un differenziale meromorfo, ma non olomorfo.

Per i tori è chiaro che il differenziale dz ha ordine nullo in ogni punto, e quindi è olomorfo e di grado 0.

Consideriamo le curve ellittiche definite da equazioni del tipo $Y^2 = X^3 - \alpha X - \beta$, ovvero espressioni del tipo $Y^2 = f(X)$ dove f è una cubica. Innanzitutto devo verificare che la curva sia liscia, per quanto detto in precedenza sulle Curve Algebriche Piane. Ora faccio notare che la curva è liscia se e solo se f ha tre radici distinte. Sia $F = Y^2 - f(X) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial X} = -f'(X)$, $\frac{\partial F}{\partial Y} = 2Y$ e le due derivate non sono mai entrambe nulle , cioè la curva è liscia, a patto che f abbia radici distinte: infatti se $Y = 0$ allora $f'(X) = 0$ e $f(X) = 0$ implicherebbero che X sia radice multipla. Questo dà precise condizioni sui coefficienti di $f(x)$, su cui non ci soffermeremo. Ora differenziando l'equazione otteniamo che $2Y\,dY = (3X^2 - \alpha)\,dX$, da cui

$$\frac{dX}{Y} = 2\frac{dY}{3X^2 - \alpha} = 2\frac{dY}{f'(X)}$$

e si vede che il differenziale $\frac{dX}{Y}$ ha ordine nullo in ogni punto del piano affine, in quanto se $y = 0$ allora $f(X) = 0$ e $f'(X) \neq 0$ per quanto detto.

Ora torniamo a questioni di carattere generale.

2.4 Pull-back e Residui differenziali

Se $F : X \to Y$ è una mappa olomorfa tra Superfici di Riemann, e ω un differenziale su Y , $\omega = \{(U_i, \omega_i = f_i dz_i)\}_i$, allora definiamo il differenziale immagine inversa o pull-back su X tramite la posizione $F^*(\omega) = \{(F^{-1}(U_i), F^*\omega_i = (f_i \circ F)dF)\}_i$. Si controlla subito che la definizione è ben posta, e che $F^*\omega$ è meromorfo (olomorfo) se ω lo è. È facile verificare che $id^*(\omega) = (\omega)$ e $(G \circ F)^* = F^*(G^*)$.

Se f è funzione meromorfa su Y , allora $F^*(f) = f \circ F$ lo è su X, e abbiamo che $F^*(df) = d(F^*(f))$. Cioè immagine inversa (per funzioni e differenziali) e differenziazione commutano tra loro. Inoltre vale che

$$ord_p(F^*\omega) = ord_{F(p)}(\omega)molt_p(F) + ram_p(F)$$

Si può dimostrare il seguente risultato:

Teorema di caratterizzazione differenziale del genere. *Per ogni* $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$ *risulta* $deg(\omega) = 2g - 2$*, se* g *è il genere di* X.

Ora passiamo a definire i Residui di differenziali. Per ogni differenziale ω su una Superficie di Riemann, e per ogni punto $p \in X$ definiamo il residuo $Res_p\omega$ come il residuo della funzione f in p dove $w = f(z)dz$ è una espressione locale di ω in una carta intorno a p. Per residuo di f si intende il coefficiente c_{-1} dello sviluppo di Laurent di f.
La definizione appena data permette di introdurre la terminologia classica. Di solito si chiamano differenziali di prima specie i differenziali olomorfi, di seconda specie i differenziali meromorfi con residuo nullo in ogni punto, di terza specie i differenziali meromorfi con al più poli semplici. Si osserva subito che un differenziale è di prima specie se e solo se è contemporaneamente di seconda e di terza specie.

Teorema dei residui. *Per ogni differenziale meromorfo su una Superficie di Riemann compatta* X *si ha che la somma dei residui è zero:*

$$\sum_{p \in X} Res_p\omega = 0$$

Infatti per ogni polo P_i possiamo considerare un disco D_i non contenente altri poli; chiamiamo D il complementare in X di $\cup_i D_i$; allora abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_{p \in X} Res_p\omega &= \sum_i \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_i} \omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\cup_i \partial D_i} \omega \\ &= = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \omega = -\frac{1}{2\pi i} \int \int_D d\omega = 0 \end{aligned}$$

A questo punto è necessaria un'osservazione che risulterà utile più avanti nella trattazione.

Osservazioni

Gli spazi di funzioni di cui sono state fatte brevi descrizioni in questo capitolo e nel precedente, sono tutti spazi vettoriali complessi. In particolare, dato U aperto su una Superficie di Riemann X, si ha che $\mathcal{E}(U)$, $\mathcal{O}(U)$ ed $\mathcal{M}(U)$ sono anelli (in particolare $\mathbb{C}$-algebre). Se U è connesso allora $\mathcal{O}(U)$ è un dominio d'integrità e $\mathcal{M}(U)$ è un campo. La moltiplicazione usuale di funzioni rende gli spazi $\mathcal{E}^{(1)}(U)$, $\mathcal{E}^{(1,0)}(U)$, $\mathcal{E}^{(0,1)}(U)$ ed $\mathcal{E}^2(U)$ moduli sull'anello $\mathcal{E}(U)$, in modo analogo $\Omega^1(U)$ e $\mathcal{M}^{(1)}(U)$ sono moduli su $\mathcal{O}(U)$ e se U è connesso allora $\mathcal{M}^{(1)}(U)$ è uno spazio vettoriale sul campo $\mathcal{M}(U)$. Inoltre si ha che:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}(U) & \subset & \mathcal{E}(U) \\ \mathcal{O}(U) & \subset & \mathcal{M}(U) \\ \Omega^1(U) & \subset & \mathcal{E}^{(1,0)}(U) \\ \Omega^1(U) & \subset & \mathcal{M}^{(1)}(U) \\ \mathcal{E}^{(1)}(U) & = & \mathcal{E}^{(1,0)}(U) \oplus \mathcal{E}^{(0,1)}(U) \end{array}$$

In particolare se $V \subset U$ sono aperti, allora per tutti questi spazi ci sono mappe di restrizione naturali dallo spazio U allo spazio V, dove ogni mappa viene indicata con ρ_V^U.
In particolare si ha che: $\rho_U^U = id$ e $\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$ se $W \subset V \subset U$. Inoltre se $F : X \to Y$ è una mappa olomorfa e $V \subset Y$ è un aperto, allora si ha che

$$F^* : \mathcal{E}^{(i)}(V) \to \mathcal{E}^{(i)}(F^{-1}(V))$$

per ogni $i = 0, 1, 2$. F^*, inoltre, commuta con le mappe di restrizione.

Capitolo 3

Divisori

3.1 Divisori: definizione e prime proprietà

Sia X una Superficie di Riemann, definiamo con $\mathbb{Z}^X$ il gruppo delle funzioni a valori interi definite su X, in cui la struttura di gruppo è data rispetto all'addizione puntuale. Data una funzione $D : X \to \mathbb{Z}$, il supporto di D è l'insieme dei punti di X in cui la funzione non è nulla, $supp(D) = \{p \in X | D(p) \neq 0\}$.

Definizione 3.1. *Data X Superficie di Riemann, si dice* divisore *di X, una funzione $D \in \mathbb{Z}^X$, il cui supporto è discreto come sottoinsieme di X. I divisori su X formano un gruppo rispetto all'addizione puntuale, che viene denotato con $Div(X)$.*

Segue immediatamente che se X è una Superficie di Riemann compatta, $D : X \to \mathbb{Z}$ è un divisore se e solo se ha supporto finito. In questo caso $Div(X)$ è esattamente il gruppo libero abeliano sull'insieme dei punti di X. Per indicare un divisore D si usa una notazione additiva:

$$D = \sum_{p \in X} D(p) \cdot p$$

dove l'insieme su cui $D(p) \neq 0$ è discreto. Anche in questo caso esiste una nozione di grado, infatti, si dice grado del divisore D definito sulla superficie X la somma dei valori assunti da D, cioè: $deg(D) = \sum_{p \in X} D(p)$.

Si può in questo modo definire l'operatore grado $deg : Div(X) \to \mathbb{Z}$ che è un omomorfismo suriettivo di gruppi, il cui nucleo corrisponde al sottogruppo $Div_0(X)$ dei divisori di grado 0.

Sia f una funzione meromorfa su una Superficie di Riemann compatta X, che non sia identicamente nulla. Allora posso definire un morfismo di gruppi abeliani

$$div : \mathcal{M}(X) \backslash 0 \to Div(X)$$

che manda ogni funzione meromorfa f nel suo divisore

$$div(f) = \sum_{p \in X} ord_p(f) \cdot p$$

(spesso si estende alla funzione nulla associando il ''divisore" 1). Chiaramente, poiché X è compatta, risulta che $ker(div) = \mathbb{C}^*$ (funzioni costanti non nulle), e definiamo come divisori principali quelli dell'immagine di div, cioè poniamo $PDiv(X) = \mathcal{I}m(div) = \{div(f) \in Div(X) : f \in \mathcal{M}^*(X)\}$. Si tratta chiaramente di un sottogruppo di $Div_0(X)$ (poiché per ogni funzione meromorfa non nulla su una Superficie di Riemann compatta abbiamo $deg(div(f)) = 0$).

Lemma 3.1. *Siano f e g due funzioni meromorfe non nulle definite su X, allora:*

- $div(fg) = div(f) + div(g)$;
- $div(\frac{f}{g}) = div(f) - div(g)$;
- $div(\frac{1}{f}) = -div(f)$.

Talvolta si usa la notazione $div(f) = div_0(f) - div_\infty(f)$, dove $div_0(f)$ e $div_\infty(f)$ sono detti rispettivamente divisori di zero e di infinito (o dei poli) di f, sono entrambi positivi a supporti disgiunti e danno come differenza il divisore della funzione.

$$div_0(f) = \sum_{\{p: ord_p(f)>0\}} ord_p(f) \cdot p \qquad div_\infty(f) = \sum_{\{p: ord_p(f)<0\}} (-ord_p(f)) \cdot p$$

Come esemplificazione, su $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ consideriamo una funzione razionale f che si può fattorizzare come $f(z) = c\prod_{i=1}^n (z - \lambda_i)^{e_i}$ dove gli e_i sono interi e i λ_i numeri complessi distinti, allora

$$div(f) = \sum_{i=1}^n e_i \cdot \lambda_i - (\sum_{i=1}^n e_i) \cdot \infty$$

Analogamente a prima, abbiamo un'applicazione di insiemi

$$div : \mathcal{M}^1(X)\backslash 0 \to Div(X)$$

che manda ogni differenziale meromorfo ω nel suo divisore

$$div(\omega) = \sum_{p \in X} ord_p(\omega) \cdot p$$

(spesso si estende al differenziale nullo dando il valore 1 al relativo divisore). Non si tratta di una applicazione di gruppi (perchè il dominio non è un gruppo) e definiamo divisori canonici i divisori dati da:

$$KDiv(X) = \mathcal{I}m(div) = \{div(\omega) \in Div(X) : \omega \in \mathcal{M}^1(X), \omega \neq 0\}$$

Siccome si ha che $div(f\omega) = div(f) + div(\omega)$, e ogni differenziale meromorfo si scrive $\omega = f\omega_0$ per un $\omega_0 \in \mathcal{E}^1(X)$, ne segue che

$$KDiv(X) = div(\omega_0) + PDiv(X)$$

cioè $KDiv(X)$ è una classe laterale di $PDiv(X)$ in $Div(X)$, e di solito è diversa da $PDiv(X)$.

Riprendiamo nuovamente l'esempio della sfera di Riemann: sia $\omega \in \mathcal{M}^1$ e $\omega = dz$, allora $div(\omega) = -2 \cdot \infty$ dato che ω non ha zeri ed ha un polo di ordine 2 all'infinito. Più in generale, se ω è della forma $f(z)dz$, con $f = c\sum_i (z - \lambda_i)^{e_i}$ funzione razionale, allora:

$$div(\omega) = \sum_i e_i \cdot \lambda_i - (2 + \sum_i e_i) \cdot \infty$$

Quindi ogni 1-forma meromorfa di questo tipo ha grado -2.

Ora sia S una Superficie di Riemann compatta di genere g, f una funzione meromorfa su S ed F mappa olomorfa associata, F di grado d. Vale quindi la formula di Hurwitz:

$$\sum_{p\in X} [mult_p(F) - 1] = 2g - 2 + 2deg(F)$$

In particolare se considero la 1-forma meromorfa ω, introdotta in precedenza sulla sfera, $\omega = dz$ e introduco la forma pull-back di ω su S: $\eta = F^*(\omega)$, allora si ha che $deg(div(\eta)) = 2g - 2$. Infatti,

$$\begin{aligned}
deg(div(\eta)) &= \sum_{p\in X} ord_p(\eta) = \sum_{p\in X} ord_p(F^*\omega) = \\
&= \sum_{p\in X} \left[ord_{F(p)}(\omega)molt_p(F) + ram_p(F)\right] = \\
&= \sum_{p\in X} \left[(1 + ord_{F(p)}(\omega))molt_p(F) - 1\right] = \\
&= \sum_{q\neq\infty} \sum_{p\in F^{-1}(q)} [molt_p(F) - 1] + \sum_{p\in F^{-1}(\infty)} [-molt_p(F) - 1] = \\
&= \sum_{p\in X} [molt_p(F) - 1] - \sum_{p\in F^{-1}(\infty)} 2mult_p(F) = \\
&= 2g - 2 + 2deg(F) - 2deg(F) = \\
&= 2g - 2
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato che:

Teorema 3.1. *Se S è una superficie di Riemann compatta su cui esiste una funzione meromorfa non costante, allora esiste sempre un divisore canonico di grado $2g-2$.*

Se $F : X \to Y$ è un'applicazione olomorfa tra Superfici di Riemann, definiamo il divisore immagine inversa tramite F come l'applicazione

$$F^* : Div(Y) \to Div(X)$$

definita da

$$F^*(q) = \sum_{\{p \in X, F(p)=q\}} molt_p(F) \cdot p$$

e poi estesa per linearità ai divisori: se

$$D = \sum_{\{q \in Y\}} ord_q(D) \cdot q$$

allora

$$F^*(D) = \sum_{\{q \in Y\}} ord_q(D) F^* \cdot q$$

e $F^*(D)$ si dice divisore pull-back.
Si tratta chiaramente di un omomorfismo di gruppi abeliani, e risulta $id^* = id$, e $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$. Risulta che $deg(F^*D) = deg(F)deg(D)$. Dunque da F^* si ottiene una mappa di gruppi $F^* : Div_0(Y) \to Div_0(X)$.
Se f è funzione meromorfa su Y , allora $F^*(f) = f \circ F$ è meromorfa su X, e abbiamo che $F^*(divf) = div(F^*(f))$. Cioè immagine inversa (per funzioni e divisori) commutano tra loro, e abbiamo una ben definita mappa di gruppi

$$F^* : PDiv(Y) \to PDiv(X)$$

Si osservi, invece, che in generale F^* non manda divisori canonici in divisori canonici.

Sia $F : X \to Y$ una mappa olomorfa non costante fra Superfici di Riemann, il divisore di ramificazione R_F è il divisore su X definito da

$$R_F = \sum_{p \in X} [mult_p(F) - 1] \cdot p$$

mentre il divisore di ramo B_F è il divisore di Y definito da

$$B_F = \sum_{y \in Y} \left[\sum_{p \in F^{-1}(y)} (mulp_p(F) - 1) \right] \cdot y$$

Se X e Y sono compatti R_F e B_F hanno la stesso grado. Inoltre per Hurwitz: $2g(X) - 2 = deg(F)(2g(Y) - 2) + deg(R_F)$. Passiamo quindi al seguente risultato:

Teorema 3.2. *Sia $F : X \to Y$ una funzione olomorfa non costante fra Superfici di Riemann e sia $\omega \in \mathcal{M}^1(Y)$ non identicamente nulla. Allora si ha che:*

$$div(F^*\omega) = F^*(div(\omega)) + R_F$$

Dimostrazione. Se $\omega = f dz$ abbiamo

$$\begin{aligned} div(F^*\omega) &= div((f \circ F)dF) \\ &= div(f \circ F) + div(dF) \\ &= div(F^*f) + Ram(F) \\ &= F^*div(f) + Ram(F) \\ &= F^*div(\omega) + Ram(F) \end{aligned}$$

come si voleva. □

Si osservi che il teorema di Riemann-Hurwitz per i generi si ottiene da questa espressione passando al grado e ricordando la caratterizzazione differenziale del genere.

Si possono definire divisori anche in casi più specifici. Sia C una curva proiettiva liscia, ovvero, una Superficie di Riemann olomorficamente immersa in un $\mathbb{P}^n$, per un un certo n, siano prese $[x_0 : \cdots : x_n]$ come coordinate omogenee in $\mathbb{P}^n$ e sia $G(x_0, \cdots, x_n)$ un polinomio omogeneo non identicamente nullo su C. Sia $p \in C$ un punto in cui $G(p) = 0$, e sia H un polinomio omogeneo dello stesso grado di G tale che $H(p) \neq 0$ (posso definire $H = x_i^d$ dove $x_i(p) \neq 0$ e d è il grado di G). Vorremmo definire il divisore intersezione di G, $div(G)$ su C, in modo che riporti i punti in cui G si annulla. A tal scopo, considero la funzione $\frac{G}{H}$ che, per come sono definiti i polinomi, è una funzione meromorfa su C nulla in p. Definisco il divisore intersezione di G come

$$div(G)(p) = ord_p(\frac{G}{H})$$

ovviamente se $q \in C$ e $G(q) \neq 0$ allora $div(G)(q) = 0$.

Lemma 3.2. *Il divisore $div(G)$ non dipende dalla scelta di H ed è ben definito.*

Dimostrazione. Supponiamo che sia usato un altro polinomio J nelle stesse condizioni di H, allora la funzione meromorfa $\frac{G}{H}$ diventa la funzione $\frac{G}{J}$, che non è nient'altro che $\frac{G}{H}$ moltiplicata per la funzione non nulla $\frac{H}{J}$. $\frac{H}{J}$ è il rapporto di due polinomi omogenei dello stesso grado, quindi è una funzione meromorfa. Inoltre $ord_p(\frac{H}{J}) = 0$ quindi $\frac{G}{H}$ e $\frac{G}{J}$ hanno lo stesso ordine, e quindi il divisore è determinato univocamente da G. □

Se G_1 e G_2 sono due polinomi omogenei, allora

$$div(G_1G_2) = div(G_1) + div(G_2)$$

Particolare importanza ha il caso in cui G ha grado uno: infatti, il divisore di intersezione viene detto divisore iperpiano. Esiste una relazione notevole fra i divisori di intersezione e i divisori principali. Siano G_1 e G_2 due polinomi omogenei dello stesso grado, allora posso definire su C la funzione meromorfa $f = \frac{G_1}{G_2}$. Vale che:

Lemma 3.3. *Se G_1 e G_2 sono due polinomi omogenei dello stesso grado, allora il divisore di $f = \frac{G_1}{G_2}$ è la differenza dei due divisori di intersezione associati ai polinomi:*

$$div(f) = div(G_1) - div(G_2)$$

Dimostrazione. Dato un punto $p \in C$, si scelga un polinomio omogeneo H della stesso grado di G_1 e G_2 tale che non si annulla in p. Allora $div(G_1)(p) = ord_p(\frac{G_1}{H})$ e $div(G_2)(p) = ord_p(\frac{G_2}{H})$. Quindi:

$$f = \frac{G_1}{G_2} = \frac{\frac{G_1}{H}}{\frac{G_2}{H}}$$

$$ord_p(f) = ord_p(\frac{G_1}{H}) - ord_p(\frac{G_2}{H})$$

quindi, ricordando le definizioni date in precedenza:

$$div(f)(p) = div(G_1)(p) - div(G_2)(p) \;\; \forall p \in C$$

□

In particolare la differenza fra due divisori iperpiani è un divisore principale.

Sia D un divisore definito su una Superficie di Riemann X, allora D si dice effettivo, ovvero $D \geq 0$ se e solo se $D(p) \geq 0 \;\; \forall p \in X$, inoltre $D_1 \geq D_2$ se e solo se $D_1 - D_2 \geq 0$. Queste relazioni inducono un ordine sui divisori di X, $Div(X)$.

Ogni divisore può essere espresso in modo unico nella forma $D = P - N$, con P e N divisori non negativi con supporto disgiunto. Se f è una funzione meromorfa allora f è olomorfa se e solo se $div(f) \geq 0$. Lo stesso risultato si applica alle 1-forme meromorfe.

Si può anche introdurre la nozione di minimo su un insieme finito di divisori, intendendo la funzione che assume il minimo valore fra tutti i dati divisori in ogni punto:

$$min\{D_1, \cdots D_n\}(p) = min\{D_1(p), \cdots, D_n(p)\}$$

Si noti che se f e g sono funzioni meromorfe non nulle allora anche $f+g$ è non nulla e vale che:

$$div(f+g) \geq min\{div(f), div(g)\}$$

È inoltre possibile definire una relazione di equivalenza fra i divisori costruiti su una Superficie di Riemann X.

3.2 Equivalenza lineare di Divisori e il Teorema di Bezout

Definizione 3.2. *Due divisori su una Superficie di Riemann, D_1 e D_2, si dicono* linearmente equivalenti*, $D_1 \sim D_2$, se la loro differenza è un divisore principale.*

Chiamiamo gruppo di Picard di X (o gruppo delle classi di divisori) il gruppo quoziente

$$Pic(X) = \frac{Div(X)}{PDiv(X)}$$

dei divisori modulo divisori principali.

Lemma 3.4. *Sia X una Superficie di Riemann, allora:*

- *la relazione di equivalenza lineare è una relazione di equivalenza su $Div(X)$;*
- *un divisore è linearmente equivalente a 0 se e solo se è un divisore principale;*
- *se X è compatta allora divisori linearmente equivalenti hanno lo stesso grado: $D_1 \sim D_2$ allora $deg(D_1) = deg(D_2)$.*

Dimostrazione. La seconda affermazione è immediata e segue dalla definizione di equivalenza lineare: $D \sim 0$ se e solo se $D - 0 = D$ che è principale. La prima affermazione, invece, segue dal fatto che la relazione di equivalenza lineare coincide con la relazione di essere nello stesso laterale del sottogruppo $PDiv(X)$ di $Div(X)$.
L'ultimo asserto segue dal fatto che, se X è compatta, i divisori principali hanno grado nullo, quindi se $D_1 \sim D_2$ allora $D_1 = div(f) + D_2$, dove f è meromorfa, quindi $deg(D_1) = deg(D_2)$. □

Passiamo quindi a descrivere le proprietà dell'equivalenza lineare.

Proposizione 3.1. *Sia X una Superficie di Riemann compatta allora si hanno i seguenti rislutati:*

1. *sia f una funzione meromorfa su X non identicamente nulla, allora il divisore degli zeri di f è linearmente equivalente al divisore dei poli di f: $div_0(f) \sim div_\infty(f)$;*

2. *Ogni coppia di divisori canonici su X è linearmente equivalente e ogni divisore equivalente ad un divisore canonico è canonico, cioè i divisori canonici formano una classe di equivalenza lineare;*

3. *nel caso della sfera di Riemann si ha che $P \sim Q$ per ogni $P, Q \in \mathbb{C}^\infty$; dunque $Pic(\mathbb{C}_\infty) \cong \mathbb{Z}$;*

4. *se $F : X \to Y$ è mappa olomorfa, allora da $D_1 \sim D_2$ segue che $F^*D_1 \sim F^*D_2$, ovvero i pull-back sono linearmente equivalenti su X. F^* , quindi, induce una mappa di gruppi $Pic(Y) \to Pic(X)$;*

5. *se $f : X \to \mathbb{C}_\infty$ è mappa olomorfa, allora i divisori immagine inversa sono tutti linearmente equivalenti. Ciò si può esprimere anche dicendo che tutte le fibre $f^*\lambda$ al variare di $\lambda \in \mathbb{C}_\infty$ sono tra loro linearmente equivalenti;*

6. *se X è una curva liscia proiettiva e G_1 e G_2 sono due polinomi omogenei dello stesso grado, allora i loro divisori di intersezione sono linearmente equivalenti. In particolare due divisori di iperpiano sono linearmente equivalenti.*

Dimostrazione. (1) Risulta immediatamente dalla definizione. (2) Si ha ricordando che i divisori canonici sono una classe laterale dei divisori principali.
(3) Siano λ_1 e λ_2 due punti in $\mathbb{C}_\infty$ diversi da ∞. Allora $f(z) = \frac{(z-\lambda_1)}{(z-\lambda_2)}$ è una funzione meromorfa con $div(f) = 1 \cdot \lambda_1 - 1 \cdot \lambda_2$. Se $\lambda_2 = \infty$ allora basta usare $f(z) = (z - \lambda_1)$.
(4) Si supponga che $D_1 - D_2 = div(f)$ su Y, dove f è una funzione meromorfa su Y. Allora $F^*(D_1) - F^*(D_2) = div(F^*(f))$ dove $F^*(f) = f \circ F$ è la composizione di f con la mappa F ed è ovviamente meromorfa.
(5) Segue da una banale applicazione delle affermazioni (3) e (4), così come (6) è applicazione del Lemma 3.3 e del Lemma 3.4, dato che il primo afferma l'equivalenza lineare dei divisori iperpiano su X compatta e il secondo dà una relazione sui gradi. $\square$

Corollario 3.1.1. *Sia X una superficie di Riemann compatta, allora si ha che:*

- *se f è meromorfa e non identicamente nulla, otteniamo che*

$$deg(div_0(f)) = deg(div_\infty(f))$$

- *i divisori canonici su X hanno tutti lo stesso grado, in particolare, se X ha genere g, allora il grado di ogni divisore canonico è $2g - 2$;*

- *se X è una curva liscia proiettiva e G_1 e G_2 sono due polinomi omogenei dello stesso grado, allora i divisori di intersezione hanno lo stesso grado.*

Su una Superficie di Riemann compatta ogni divisore principale ha grado nullo, e questa, nel caso della sfera di Riemann, diventa una condizione sufficiente affinchè un divisore sia principale.

Proposizione 3.2. *Un divisore D su $\mathbb{C}_\infty$ è principale se e solo se ha grado nullo.*

Dimostrazione. Il fatto che la condizione sia necessaria è stato già dimostrato, passiamo, quindi, alla dimostrazione della sufficienza. Sia $deg(D) = 0$ e $D = \sum_i e_i\lambda_i + e_\infty\infty$ dove $\lambda_i \in \mathbb{C}$ e $e_\infty = -\sum_i e_i$. Allora $D = div(f)$ dove $f(z) = \prod_i (z - \lambda_i)^{e_i}$. □

Corollario 3.2.1. *Siano D_1 e D_2 due divisori sulla Sfera di Riemann, $D_1 \sim D_2$ se e solo se $deg(D_1) = deg(D_2)$.*

Ora possiamo dare una nuova defnizione di grado di una curva liscia proiettiva:

Definizione 3.3. *Sia X una curva liscia proiettiva, $deg(X)$ è il* grado *di ogni divisore di iperpiano di X.*

La definizione è ben posta dato che ogni coppia di divisori iperpiano è linearmente equivalente ed ha lo stesso grado dato che X è compatta.

In precedenza avevamo dato un'altra definizione di grado: sia X definita dall'annullarsi di un polinomio omogeneo F di grado d, allora $deg(X) = d$. Le definizioni date coincidono, in particolare vale che:

Proposizione 3.3. *Sia X una curva liscia proiettiva definita da F, polinomio omogeneo di grado d, allora X ha grado d, ovvero ogni divisore iperpiano ha grado d.*

Dimostrazione. Sia G un polinomio omogeneo di grado 1 che definisce un divisore iperpiano $div(G)$ su X, con un cambiamento di cordinate, se necessario, considero G della forma $G(x, y, z) = x$ e faccio in modo che $[0:0:1] \notin X$ in modo che x e y non si annullino mai contemporaneamente su X.
Per calcolare il divisore di intersezione uso, quindi, la funzione $h = \frac{x}{y}$ che è chiaramente meromorfa. In particolare succederà che $div(G) = div(x) = ord(h) = div_0(h) = div_0(\frac{x}{y})$.
Sia dunque H la mappa olomorfa associata ad h, $H : X \to \mathbb{C}_\infty$, il divisore degli zeri di h coincide con il divisore immagine inversa $H^*(0)$: $deg(div(x)) = deg(H^*(0)) = deg(H)$. Per calcolare il grado di H, fisso $\lambda \in \mathbb{C}$, se $H(p) = \lambda$ allora p deve avere la forma $p = [x : y : z]$ con $x = \lambda y$. $\forall p \in X \quad F(p) = 0$ e se $\lambda \neq 0$, nè x nè y sono nulli dal momento che $[0 : 0 : 1] \notin X$, allora tutti i punti di $H^{-1}(\lambda)$ possono essere scritti nella forma $[\lambda : 1 : \omega]$ con $F(\lambda, 1, \omega) = 0$. Per un generico λ questo è un polinomio in ω di grado d ed ha d soluzioni. Ora per λ generico le soluzioni sono distinte ed H presenta tali radici con molteplicità 1, in tal caso infatti λ non è punto di ramo di H. Quindi $H^{-1}(\lambda)$ ha cardinalità d, quindi H ha grado d. Allora $div(x)$ ha grado d. $\square$

Sia X una curva liscia proiettiva in $\mathbb{P}^n$ di grado d e $G(x_0, \cdots, x_n)$ un polinomio omogeneo di grado e che definisce il divisore intersezione $div(G)$. In modo intuitivo si può affermare che il divisore intersezione segnala il numero di punti di intersezione fra X e $G = 0$. Il teorema di Bezout fornisce il grado del divisore intersezione e quindi il numero di punti di intersezione contati con le relative molteplicità.

Teorema di Bezout. *Sia X una curva liscia proiettiva in $\mathbb{P}^n$ di grado d e $G(x_0, \cdots, x_n)$ un polinomio omogeneo di grado e non identicamente nullo su X. Allora:*

$$deg(div(G)) = deg(X) \cdot deg(G) = d \cdot e$$

Dimostrazione. Sia H un polinomio omogeneo di grado 1 che definisce un divisore di iperpiano $div(H)$ su X. Allora H^e è un polinomio omogeneo di grado e : $deg(H) = deg(G) = e$, ma X è una Superficie di Riemann compatta e questo implica che i divisori associati hanno lo stesso grado su X: $deg(div(H^e)) = deg(div(G))$. Ma $div(H^e) = e\, div(H)$ e quindi $deg(div(H^e)) = e\, deg(div(H)) = e\, deg(X) = e\, d$ per definizione di grado di X. Quindi per G si ha che:

$$deg(div(G)) = deg(div(H^e)) = e\, deg(div(H)) = e\, deg(X) = e\, d$$

$\square$

Il teorema di Bezout permette di enunciare un altro importante risultato, la formula di Plücker. Ma prima di poter procedere è necessario un lemma:

Lemma 3.5. *Sia X una curva liscia proiettiva in $\mathbb{P}^n$ definita da un polinomio omogeneo $F(x,y,z)$ di grado d non identicamente nullo su X e si consideri la mappa $\pi : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ definita da $\pi[x:y:z] = [x:z]$. $\frac{\partial F}{\partial y}$ è un polinomio omogeneo e $div(\frac{\partial F}{\partial y})$ su X coincide con il divisore di ramificazione di π:*

$$div(\frac{\partial F}{\partial y}) = R_\pi$$

Dimostrazione. Il lemma implica che $div(\frac{\partial F}{\partial y})$ e R_π hanno il medesimo supporto e $\forall p \in X$, π è ramificata in p se e solo se $div(\frac{\partial F}{\partial y})(p) = 0$.
Dimostriamo l'asserto nell'aperto dove $z \neq 0$, negli altri aperti l'argomento è simile. X in tale aperto è isomorfa alla curva affine piana definita da $f(x,y) = 0$ dove $f(x,y) = F(x,y,1)$, in questo modo la mappa π diventa la mappa di proiezione $\pi(x,y) = x$.
Sia $p = (x_0, y_0)$ un punto di ramificazione di π e quindi anche uno zero di $\frac{\partial f}{\partial y}$. Ora dal fatto che X è liscia in p, si ha che $\frac{\partial f}{\partial x}$ non è nulla in p. Sia y una coordinata locale per X in un intorno W di p. Per il teorema della funzione implicita, in W la curva X è localmente il grafico di una funzione olomorfa $g(y)$. Dunque $f(g(y),y) = 0$ in un intorno di y_0. Derivando ho che:

$$f(g(y),y) = 0 \qquad \forall y \in B(y_0, \epsilon)$$

$$(\frac{\partial f}{\partial x})(g'(y))(p) + (\frac{\partial f}{\partial y})(p) = 0$$

quindi

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial x} g'(y)$$

Ora $g(y)$ è la forma locale di π. L'ordine di $g(y)$ è la molteplicità della mappa π. Dato che l'ordine diminuisce di 1 con la derivazione, l'ordine di $g'(y)$ è pari alla molteplicità della mappa di proiezione diminuito di 1. Ora dato che $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$ in p, $ord(g'(y)) = ord_p(\frac{\partial f}{\partial y})$ allora

$$div(\frac{\partial F}{\partial y})(p) = ord_p(\frac{\partial f}{\partial y}) = mult_p(\pi) - 1 = R_\pi$$

□

Formula di Plücker. *Una curva piana liscia proiettiva di grado d ha genere*

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

Dimostrazione. Sia X una curva liscia proiettiva definita da $F(x,y,z) = 0$ dove $F(x,y,z)$ è un polinomio omogeneo di grado d. Sia $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ la mappa di proiezione $\pi[x:y:z] = [x:z]$. Per il lemma precedente π ha grado d e $div(\frac{\partial F}{\partial y}) = R_\pi$, applico il teorema di Bezout ed ottengo che: $deg(div(\frac{\partial F}{\partial y})) = d(d-1)$. Ora vale anche la formula di Hurwitz: $2g - 2 = d(-2) + d(d-1)$ per il genere g di X. Quindi si ottiene che $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$. □

3.3 Gli spazi $\mathcal{L}(D)$ e i sistemi lineari completi $|D|$

Lo studio dei divisori su una Superficie di Riemann è finalizzato alla riorganizzazione delle funzioni meromorfe definite sulla superficie. A tal scopo definiamo $ord_p(f) = \infty$ se f è identicamente nulla in un intorno di p.

Definizione 3.4. *Sia X una Superficie di Riemann, e sia $D \in Div(X)$ un divisore definito su X. Definiamo il $\mathbb{C}$-spazio vettoriale delle funzioni meromorfe controllate da D come*

$$\mathcal{L}(D) = \{f \in \mathcal{M}(X) : div(f) + D \geq 0\}$$

Sia $p \in X$, se $D(p) = n > 0$ e se $f \in \mathcal{L}(D)$ allora $ord_p(f) \geq -n$, cioè f potrebbe avere al massimo un polo di ordine n in p; se invece se $D(p) = -n < 0$ allora $ord_p(f) \geq n$, cioè f potrebbe avere al massimo uno zero di ordine n in p. Sia $D = \sum_p n_p \cdot p$ per ogni punto p, per cui si sceglie come coordinata locale z. Allora $f \in \mathcal{L}(D)$ se e solo se per ogni $p \in X$ la serie di Laurent di f non ha termini più piccoli di z^{-n_p}.
Siano D_1 e D_2 due divisori su X tali che $D_1 \leq D_2$ ogni funzione con poli limitati da D_1 ha poli limitati da D_2, cioè $\mathcal{L}(D_1) \subseteq \mathcal{L}(D_2)$. Se $f \in \mathcal{M}(X)$ allora $f \in \mathcal{O}(X)$ se e solo se $div(f) \geq 0$ quindi $\mathcal{L}(0) = \mathcal{O}(X)$. Se X è compatta $\mathcal{L}(0) = \mathcal{O}(X) = \mathbb{C}$.

Lemma 3.6. *Sia X una Superficie di Riemann compatta, se D è un divisore su X con $deg(D) < 0$ allora $\mathcal{L}(D) = \{0\}$*

Dimostrazione. Se per assurdo $f \in \mathcal{L}(D)$ ed f non identicamente nulla, allora posso considerare il divisore $E = div(f) + D$. Ora dato che $f \in \mathcal{L}(D)$ sicuramente $E \geq 0$ e $deg(E) \geq 0$ ma $deg(div(f)) = 0$ allora $deg(E) = deg(D) < 0$ il che è assurdo. $\square$

Definizione 3.5. *Sia X una Superficie di Riemann compatta e D un divisore su X, il* sistema lineare completo *$|D|$ è l'insieme dei divisori effettivi $E \geq 0$ linearmente equivalenti a D:*

$$|D| = \{E \in Div(X) | E \sim D \text{ e } E \geq 0\}$$

Se X è compatta e $deg(D) < 0$ allora $|D| = \emptyset$.
Ricordo che, dato uno spazio vettoriale complesso V, il proiettivizzato $\mathbb{P}(V)$ è l'insieme dei sottospazi vettoriali 1-dimensionali di V. Se V ha dimensione $n+1$, allora $\mathbb{P}(V)$ può essere messo in corrispondenza biunivoca con lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n$.
Considerato $\mathcal{L}(D)$, se si prende il proiettivizzato $\mathbb{P}(\mathcal{L}(D))$ si può definire una mappa:

$$S : \mathbb{P}(\mathcal{L}(D)) \to |D|$$

in modo che la classe di ogni funzione $[f] \mapsto div(f) + D$. Ora dato che $div(f) = div(\lambda f)$ per ogni costante λ, la mappa S è ben definita.

Lemma 3.7. *Se X è una Superficie di Riemann compatta allora S è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Sia $E \in |D|$ allora $E \sim D$ ed esiste una funzione meromorfa f su X tale che $E = div(f) + D$; ora dato che $E \geq 0$ la funzione $f \in \mathcal{L}(D)$. Ovviamente $S(f) = E$, quindi S è suriettiva. Per dimostare l'iniettività, siano f e g tali che $S(f) = S(g)$. Questo implica che $div(f)+D = div(g)+D$, quindi $div(f) = div(g)$ e $div(\frac{f}{g}) = 0$ allora $\frac{f}{g}$ non ha zeri o poli su X. Ma la superficie è compatta quindi $\frac{f}{g}$ deve essere una costante non nulla. Quindi $[f] = [g]$ ed S è, quindi, iniettiva. $\square$

Quindi per una Superficie di Riemann X compatta i sistemi lineari completi hanno una struttura di spazio proiettivo. In particolare un sistema lineare completo di dimensione 1 si dice *pencil* o fascio, di dimensione 2 *net* e 3 *web*.
Se due divisori su una Superficie di Riemann sono linearmente equivalenti, allora gli spazi di funzioni meromorfe associati sono isomorfi.

Proposizione 3.4. *Siano D_1 e D_2 due divisori linearmente equivalenti su una Superficie di Riemann X, in particolare $D_1 = D_2 + div(h)$ per una funzione meromorfa h non identicamente nulla. Allora la moltiplicazione per h dà un isomorfismo fra spazi vettoriali complessi:*

$$\mu_h : \mathcal{L}(D_1) \overset{\cong}{\to} \mathcal{L}(D_2)$$

Se $D_1 \sim D_2$ allora $dim(\mathcal{L}(D_1)) = dim(\mathcal{L}(D_2))$.

Dimostrazione. Se $f \in \mathcal{L}(D_1)$ allora $div(f) \geq -(D_1)$. Applico la moltiplicazione per h, ho quindi che: $div(fh) = div(f) + div(h) \geq div(h) - D_1 = -D_2$ allora $hf = \mu_h(f) \in \mathcal{L}(D_2)$. Analogamente definiamo $\mu_{\frac{1}{h}} : \mathcal{L}(D_2) \to \mathcal{L}(D_1)$. Dato che queste sono mappe lineari tali che l'una è l'inversa dell'altra, μ_h è un isomorfismo fra $\mathcal{L}(D_1)$ e $\mathcal{L}(D_2)$. $\square$

Nel caso delle 1-forme meromorfe si può ripetere la medesima costruzione:

Definizione 3.6. *Sia X una Superficie di Riemann, e sia $D \in Div(X)$ un divisore definito su X. Definiamo il $\mathbb{C}$-spazio vettoriale dei differenziali meromorfi controllati da D come*

$$\mathcal{L}^{(1)}(D) = \left\{\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X) | div(\omega) + D \geq 0\right\}$$

Chiaramente si ha che $\mathcal{L}^{(1)}(0) = \Omega^{(1)}(X)$ lo spazio delle 1-forme olomorfe. In particolare vale l'analogo della proposizione precedente:

Proposizione 3.5. *Siano D_1 e D_2 due divisori linearmente equivalenti su una Superficie di Riemann X, con $D_1 = D_2 + div(h)$ per una funzione meromorfa h non identicamente nulla. Allora la moltiplicazione per h dà un isomorfismo fra spazi vettoriali complessi:*

$$\mu_h : \mathcal{L}^{(1)}(D_1) \overset{\cong}{\to} \mathcal{L}^{(1)}(D_2)$$

Se $D_1 \sim D_2$ allora $dim(\mathcal{L}^{(1)}(D_1)) = dim(\mathcal{L}^{(1)}(D_2))$.

La costruzione dello spazio $\mathcal{L}^{(1)}(D)$ può essere messa direttamente in relazione con lo spazio $\mathcal{L}(D)$.

Sia fissato un divisore canonico $K = div(\omega)$, dove ω è una 1-forma meromorfa, e un altro divisore D. Si consideri inoltre $f \in \mathcal{M}(X)$, $f \in \mathcal{L}(D + K)$ cioè $div(f) + D + K \geq 0$. Si ottiene:

$$div(f\omega) = div(f) + div(\omega) = div(f) + K \geq -D - K + K = -D$$

Allora $f\omega \in \mathcal{L}^{(1)}(D)$; la moltiplicazione per ω dà, dunque, una mappa $\mathbb{C}$-lineare:

$$\mu_\omega : \mathcal{L}(D + K) \to \mathcal{L}^{(1)}(D)$$

Lemma 3.8. *La mappa μ_ω è un isomorfismo di spazi vettoriali.*

Dimostrazione. La mappa è ovviamente iniettiva e lineare. Sia $\omega' \in \mathcal{L}^{(1)}(D)$ una 1-forma tale che $div(\omega')+D \geq 0$. Esiste sempre una funzione meromorfa f tale che $\omega' = f\omega$. Quindi vale che

$$div(f) + D + K = div(f) + D + div(\omega) = div(f\omega) + D = div(\omega') + D \geq 0$$

quindi $f \in \mathcal{L}(D + K)$ e $\mu_\omega(f) = \omega'$. □

Veniamo ora al caso della sfera di Riemann. Sia D un divisore sulla sfera, con $deg(D) \geq 0$,

$$D = \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \lambda_i + e_\infty \cdot \infty$$

con i λ_i distinti in $\mathbb{C}$ e $\sum_{i=1}^{n} e_i + e_\infty \geq 0$. Si consideri la funzione

$$f_D(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - \lambda_i)^{-e_i}$$

Proposizione 3.6. *Con la notazione precedente, lo spazio $\mathcal{L}(D)$ è lo spazio:*

$$\mathcal{L}(D) = \{g(z)f_D(z) |\ g(z) \text{ è un polinomio di grado al massimo pari a } deg(D)\}$$

Dimostrazione. Si fissi un polinomio $g(z)$ di grado d, ovviamente $div(g) \geq -d \cdot \infty$. Il divisore di f_D è esattamente

$$\sum_i -e_i \cdot \lambda_i + \sum_i e_i \cdot \infty$$

quindi

$$\begin{aligned} div(g(z)f_D(z)) + D &= div(g) + div(f_D) + D \geq ((\sum_i e_i) + e_\infty - d) \cdot \infty = \\ &= (deg(D) - d) \cdot \infty \end{aligned}$$

che è al minimo 0 se $d \leq deg(D)$. Questo prova che lo spazio dato è sottospazio di $\mathcal{L}(D)$. Ora si consideri una qualsiasi funzione non nulla $h \in \mathcal{L}(D)$ e si prenda $g = \frac{h}{f_D}$. Si ha che

$$div(g) = div(h) - div(f_D) \geq -D - div(f_D) = (-\sum_i e_i - e_\infty) \cdot \infty = -deg(D) \cdot \infty$$

ovvero g non può avere poli se non all'infinito e al massimo di grado $deg(D)$. Questo fa sì che g sia un polinomio di grado al massimo $deg(D)$. □

Corollario 3.6.1. *Sia D un divisore sulla Sfera di Riemann, allora*

$$dim(\mathcal{L}(D)) = \begin{cases} 0 & se\ deg(D) < 0 \\ 1 + deg(D) & se\ deg(D) \geq 0 \end{cases}$$

Ora, per ogni divisore abbiamo definito degli spazi di funzioni (e differenziali) meromorfi controllati dal divisore. Quindi la domanda fondamentale diventa decidere se si tratta di spazi di dimensione finita su $\mathbb{C}$, ed eventualmente trovarne la dimensione.

Teorema 3.3. *Sia X una Superfice di Riemann e sia D un divisore su X. Allora per ogni $p \in X$ si ha che $\mathcal{L}(D-p)$ è uguale a $\mathcal{L}(D)$ oppure $\mathcal{L}(D-p)$ ha codimensione uno in $\mathcal{L}(D)$.*

Dimostrazione. Se $p \in X$ è tale che $n = ord_p(D) > 0$, consideriamo la mappa $\alpha : \mathcal{L}(D) \to \mathbb{C}$ che manda ogni funzione $f \in \mathcal{L}(D)$ nel coefficiente a_{-n} del suo sviluppo di Laurent in p. Questa mappa è lineare, quindi suriettiva o nulla, e il suo nucleo è dato da $\mathcal{L}(D-p)$. Quindi $\mathcal{L}(D-p)$ o coincide con $\mathcal{L}(D)$, oppure ha codimensione 1 in $\mathcal{L}(D)$. □

Teorema 3.4. *Sia X una Superficie di Riemann compatta e sia $D \in Div(X)$. Allora lo spazio di funzioni $\mathcal{L}(D)$ è uno spazio vettoriale complesso finito dimensionale. Infatti se e poniamo $D = P - N$, con P e N divisori effettivi con supporto disgiunto, allora $dim(\mathcal{L}(D)) \leq deg(P) + 1$; in particolare se D è un divisore effettivo $dim(\mathcal{L}(D)) \leq deg(D) + 1$.*

Dimostrazione. Innanzitutto, si noti che il teorema è valido per $D = 0$. Su una Superficie di Riemann compatta, infatti, lo spazio $\mathcal{L}(0)$ è formato dalle funzioni costanti e quindi ha dimensione 1.
Ora procediamo per induzione sul grado della parte positiva P di D. Se $deg(P) = 0$ allora $P = 0$, quindi $dim(\mathcal{L}(P)) = 1$; dato che $D \leq P$ si ha che $\mathcal{L}(D) \subseteq \mathcal{L}(P)$ allora si ha che $dim(\mathcal{L}(D)) \leq dim(\mathcal{L}(P)) = 1 = 1 + deg(P)$.
Si assuma quindi il teorema vero per divisori tali da avere parte positiva con grado $k - 1$ e ne dimostriamo la validità per quelli con parte positiva di grado k, $k \geq 1$.
Fissato un divisore D, $D = P - N$ con $deg(P) = k$. Si prenda $p \in supp(P)$ cioè tale che $P(p) \geq 1$. Il divisore $D - p$ ha parte positiva $P - p$ di grado $deg(P - p) = k - 1$, allora per ipotesi induttiva si ha che: $dim(\mathcal{L}(D - p)) \leq deg(P - p) + 1 = deg(P)$. Applicando il teorema precedente posso concludere che:

$$dim(\mathcal{L}(D)) \leq dim(\mathcal{L}(D - p)) + 1 \leq deg(P) + 1$$

□

Il fatto che gli spazi $\mathcal{L}(D)$ siano finito dimensionali implica lo stesso per gli spazi $\mathcal{L}^{(1)}(D)$ per l'isomorfismo fra $\mathcal{L}^{(1)}(D)$ e $\mathcal{L}(D + K)$ per un divisore canonico K.

Corollario 3.4.1. *Sia X una Superficie di Riemann compatta, allora gli spazi $\mathcal{L}^{(1)}(D)$ sono finito dimensionali.*

Capitolo 4

Teoria dei Fasci e Coomologia di Cĕch

4.1 Prefasci: definizione ed esempi

Definizione 4.1. *Sia X uno spazio topologico. Un* prefascio *$\mathcal{F}$ di insiemi su X è dato da:*

- *ad ogni aperto U di X, si associa un insieme $\mathcal{F}(U)$ (chiamato l'insieme delle sezioni di $\mathcal{F}$ sopra U);*
- *ad ogni coppia di aperti $V \subseteq U$ di X, corrisponde una mappa restrizione $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ tale che per ogni U si ha $\rho_U^U = id_U$ e ogni qualvolta si hanno tre aperti $W \subseteq V \subseteq U$, si ha $\rho_W^U = \rho_W^V \circ \rho_V^U$.*

Un prefascio di gruppi abeliani sopra X è un prefascio $\mathcal{F}$ di insiemi tale che:

- *ogni $\mathcal{F}(U)$ ha una data struttura di gruppo abeliano;*
- *ogni mappa restrizione ρ_V^U è un omomorfismo di gruppi rispetto a queste strutture.*

Sia A un insieme assegnato, o un gruppo abeliano, allora il prefascio costante $\mathcal{A}_X$ su X è dato da

$$\begin{cases} \mathcal{A}_X(U) = \mathcal{A} & \text{per } U \text{ aperto di } X \\ \rho_V^U = id_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}_X(U) \to \mathcal{A}_X(V) & \text{per aperti } V \subseteq U \text{ in } X \end{cases}$$

Sia Y un altro spazio topologico. Il prefascio $\mathcal{C}^Y$ delle funzioni continue a valori in Y su X è definito da:

$$\begin{cases} \mathcal{C}^Y(U) = \{f : U \to Y \text{ continue }\} & \text{per } U \text{ aperto di } X \\ \rho_V^U = \mathcal{C}^Y(U) \to \mathcal{C}^V(V) & \text{per aperti } V \subseteq U \text{ in } X \end{cases}$$

da qui il nome restrizione per i morfismi ρ_V^U.
Se inoltre Y ha la struttura di un gruppo abeliano, anche $\mathcal{C}^Y(U)$ ne possiede una, dotandolo dell'operazione $(f+g)(x) := f(x) \bullet g(x)$, dove $\bullet$ è l'operazione in Y . In questo caso $\mathcal{C}^Y(U)$ è un prefascio di gruppi abeliani.

Nel corso della trattazione precedente abbiamo già introdotto alcuni spazi su cui si può porre una struttura di fascio in modo naturale usando le mappe di restrizione, si tratta di $\mathcal{O}_X(U)$ che risulta prefascio di anelli, $\mathcal{O}_X^*(U)$ prefascio di gruppi rispetto alla moltiplicazione puntuale. Analogamente per $\mathcal{M}_X(U)$ e $\mathcal{M}_X^*(U)$. Sia X una Superficie di Riemann e D un divisore definito su X. Sia $\mathcal{O}_X[D](U)$ lo spazio delle funzioni meromorfe su U tali che $ord_p(f) \geq -D(p)$ per ogni $p \in U$, questo è un prefascio di gruppi. In particolare $\mathcal{O}_X[0](U) = \mathcal{O}_X(U)$ ovvero al prefascio formato dalle funzioni olomorfe.

Sia $\mathcal{F}$ un prefascio (di insiemi o gruppi abeliani) sopra uno spazio topologico X. Fissiamo un punto $x \in X$. Gli $\mathcal{F}(U)$, al variare di U in tutti gli aperti tali che $U \ni x$, formano un sistema diretto con applicazioni

$$\rho_V^U = \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V) \qquad\qquad U \supseteq V \ni x$$

La spiga $\mathcal{F}_x$ di $\mathcal{F}$ in x è $lim_{\overrightarrow{x \in U}} \mathcal{F}(U)$. Essa viene dotata di applicazioni

$$\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x : s \mapsto s_x$$

per ogni aperto $U \ni x$. Gli elementi di $\mathcal{F}_x$ sono chiamati germi (di sezioni di F).

Dati due prefasci $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ di insiemi su X, un morfismo $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è una collezione di applicazioni $f(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$, al variare di U negli aperti di X,tale che, per aperti $U \supseteq V$ in X, il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{f(U)} & \mathcal{G}(U) \\ {\scriptstyle \rho_V^U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho'^U_V} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{f(V)} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

commuti, cioè $f(V)\,\rho_V^U = \rho'^U_V\, f(U)$. Se $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ sono prefasci di gruppi abeliani, nella definizione si richiede che ogni $f(U)$ sia un omomorfismo di gruppi abeliani.

Sia M una varietà complessa. Su di essa consideriamo i prefasci di gruppi abeliani (con operazione $+$) $\mathcal{O}_M$ e C_M^0 (quest'ultimo il fascio delle funzioni continue su M). Allora l'inclusione $\mathcal{O}_M \hookrightarrow C_M^0$ è un morfismo di prefasci abeliani.

Analogamente data una varietà complessa M, consideriamo il prefascio di gruppi abeliani $\mathcal{O}_M^*$, definito da $\mathcal{O}_M^*(U) = \{f \in \mathcal{O}_M(U) | f(z) \neq 0 \forall z \in M\}$, in cui l'operazione è la moltiplicazione. Allora l'applicazione $\tilde{e} : \mathcal{O}_M \to \mathcal{O}_M^*$ data, su ogni aperto U, da $\tilde{e}(U)(f) = e^{2\pi i f}$ è un morfismo di prefasci abeliani.

La composizione di morfismi è definita in maniera naturale: $(g \circ f)(U) = g(U) \circ f(U)$ se $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H}$. Un morfismo $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è un isomorfismo di prefasci (di insiemi o di gruppi abeliani) se e solo se esiste un morfismo $g : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ tale che $f \circ g = id_{\mathcal{G}}$ e $g \circ f = id_{\mathcal{F}}$ (dove $id_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ è definita come $id_{\mathcal{F}}(U) = id_{\mathcal{F}(\mathcal{U})}$ per ogni aperto U in X).

Proposizione 4.1. *$f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è un isomorfismo di prefasci di gruppi abeliani (di insiemi) se e solo se per ogni aperto U di X, $f(U)$ è un isomorfismo ($f(U)$ è bigettiva).*

Dimostrazione. f è un isomorfismo se e solo se esiste g tale che $f \circ g = id_{\mathcal{G}}$ e $g \circ f = id_{\mathcal{F}}$ e questo avviene se e solo se esiste g tale che per ogni $U \subset X$ si ha $f(U) \circ g(U) = id_{\mathcal{G}(U)}$ e $g(U) \circ f(U) = id_{\mathcal{F}(U)}$ e quindi se e solo se per ogni U si ha che $f(U)$ è un isomorfismo. È facile verificare che se $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è un morfismo con tutti gli $f(U)$ isomorfismi, gli inversi $f(U)^{-1} : \mathcal{G}(U) \to \mathcal{F}(U)$ soddisfano le condizioni di compatibilità con la restrizione. $\square$

Dato un morfismo di prefasci $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ su X, a ciascun punto $x \in X$ corrisponde un morfismo di spighe

$$f_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$$

in modo tale che per ogni composizione $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H}$, abbiamo $(g \circ f)_x = g_x \circ f_x$. Dato $x \in X$ definiamo f_x come segue: qualsiasi $e \in \mathcal{F}_x$ è della forma $e = s_x$ per qualche aperto $U \ni x$ e qualche $s \in \mathcal{F}(U)$, quindi poniamo $f_x(e) = (f(U)(s))_x$, cioè prendiamo il germe dell'immagine di s. Se si ha $e = s_x = t_x$ con $t \in \mathcal{F}(V)$, allora per definizione $\exists W \subset U \cap V$ con $x \in W$ e $\rho_W^U(s) = \rho_W^V(t)$; quindi abbiamo

$$\rho_W^U(f(U)(s)) = f(W)\rho_W^U(s) = f(W)\rho_W^V(t) = \rho_W^V(f(V)(t))$$

così che $(f(U)(s))_x = (f(V)(t))_x$ e dunque f_x è ben definita.

Chiaramente per quanto visto negli esempi precedenti, si può definire un prefascio ogniqualvolta si ha una proprietà su un aperto che rimane invariata per ogni sottoinsieme (aperto) dell'aperto di partenza. Cioè se una proprietà vale su un aperto U e vale $\forall V \subset U$ allora posso definire un prefascio di forme o funzioni a seconda di quella proprietà.
Ci si chiede, allora, se può valere l'inverso ovvero quando una proprietà vale

se e solo se vale sui sottoinsiemi. Per essere più precisi, sia se $\{U_i\}$ è un ricoprimento aperto di un aperto U la proprietà vale su U se e solo se vale su ogni U_i.

4.2 Fasci: definizione e costruzione

Definizione 4.2. *Un prefascio $\mathcal{F}$ di insiemi sopra uno spazio topologico X si dice* fascio *se soddisfa le seguenti proprietà dette assiomi di fascio:*

1. *Sia U un aperto qualsiasi di X e $U = \cup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ un ricoprimento aperto di U (quindi ogni U_λ è aperto in X); se $s, s' \in \mathcal{F}(U)$ sono due sezioni di $\mathcal{F}$ tali che*
$$\forall\lambda \in \Lambda \qquad \rho^U_{U_\lambda}(s) = \rho^U_{U_\lambda}(s')$$
allora $s = s'$. I prefasci che soddisfano questa proprietà sono chiamati monoprefasci.

2. *Sia U un aperto qualsiasi di X e $U = \cup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ un ricoprimento aperto di U e sia data una famiglia di sezioni $(s_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ di $\mathcal{F}$ con $s_\lambda \in \mathcal{F}(U_\lambda)$ $\forall\lambda \in \Lambda$ tale che*
$$\forall\lambda, \mu \in \Lambda \qquad \rho^{U_\lambda}_{U_\lambda\cap U_\mu}(s_\lambda) = \rho^{U_\mu}_{U_\lambda\cap U_\mu}(s_\mu)$$
allora $\exists$ (e, per la richiesta (1), è unica) una $s \in \mathcal{F}(U)$ tale che
$$\forall\lambda \in \Lambda \qquad \rho^U_{U_\lambda}(s) = s_\lambda$$
Questa condizione è anche detta di condizione di incollamento.

Un fascio di gruppi abeliani è un prefascio di gruppi abeliani che soddisfa le condizioni (1) e (2).

Notiamo che per un prefascio di gruppi abeliani, possiamo semplificare la (1) ponendo $s' = 0$ e quindi la seconda condizione diventa centrale.

Proposizione 4.2. *Se $\mathcal{F}$ è un prefascio e $\mathcal{G}$ un monoprefascio sopra X, e $f, g : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ sono due morfismi che coincidono su tutte le spighe, allora $f = g$.*

Un morfismo di fasci è semplicemente un morfismo di prefasci tra due fasci. Osserviamo che se $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è un isomorfismo di prefasci, e $\mathcal{G}$ è un fascio, allora anche $\mathcal{F}$ è un fascio. Inoltre, i fasci sono caratterizzati dalla seguente proprietà: dato un fascio $\mathcal{F}$ su uno spazio topologico X, per qualsiasi aperto U, due sezioni $s, s' \in \mathcal{F}(U)$ sono uguali se e solo se i loro germi coincidono ovunque in U.

Tutti gli esempi di prefasci di funzioni $\mathcal{O}_X$, $C_X\ldots$ sono fasci, e tutti per la stessa ragione: affinché un'applicazione arbitraria a valori in $Y, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ soddisfi la condizione appropriata (continuità, differenziabilità, analiticità,...) è necessario e sufficiente che la condizione sia soddisfatta in qualche piccolo intorno di ogni punto: cosi una funzione "incollata" soddisferà ancora la condizione.

Per ogni insieme S ed ogni spazio topologico X, si ha il prefascio costante $\mathcal{F}$, che ad ogni aperto U di X associa $\mathcal{F}(U) = S$, come abbiamo già mostrato. La mappa di restrizione è l'identità. $\mathcal{F}$ è un prefascio ma non è un fascio: siano U e V due aperti disgiunti, s e t sono due elementi distinti di S. s determina una sezione di $\mathcal{F}(U)$, t una sezione di $\mathcal{F}(V)$. Poiché U e V sono disgiunti, le ipotesi dell'assioma di incollamento sono verificate. Se $\mathcal{F}$ fosse un fascio, dovrebbe esistere un elemento di $\mathcal{F}(U \cup V)$ che si restringe ad s su U ed a t su V, il che è impossibile: dovrebbe esistere un elemento di S uguale sia a s che a t. Partendo dal prefascio costante, è comunque possibile costruire un fascio, chiamato fascio costante. Basta definire come l'insieme delle funzioni da U ad S costanti sulle componenti connesse di U. Si verifica facilmente che è un fascio.

Sia X uno spazio topologico e per ogni punto $p \in X$ sia assegnato un differente gruppo G_p. Il fascio grattacielo su p con spiga $\mathcal{S}$ è il fascio $\mathcal{S}_p$ definito nel modo seguente: se U è un aperto contenente p, allora

$$\mathcal{S}_p(U) = \prod_{p \in U} G_p$$

Le mappe di restrizione sono l'identità tra aperti contenenti p e la mappa banale altrimenti. Ora dal momento che non ci sono richieste di relazione fra i gruppi e i punti il fascio grattacielo è un fascio in generale totalmente discontinuo. Il fascio grattacielo prende il suo nome da un caso particolare: sia usato uno stesso gruppo G in ogni punto di X in questo modo ottengo un fascio $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S}_p(U) = \begin{cases} \{0\} & \text{se } p \notin U \\ G & \text{se } p \in U \end{cases}$$

Sia S una Superficie di Riemann, se assegno il gruppo degli interi su ogni punto allora per ogni aperto U posso considerare l'insieme delle funzioni definite su U a valori in $\mathbb{Z}$ che hanno supporto discreto. Funzioni di questo tipo sono divisori su U. In questo modo ottengo il fascio grattacielo dei divisori Div_X.

Dato un divisore D su una Superficie di Riemann X e scelte come coordinate locali z_p per ogni $p \in X$, ad ogni p associo il gruppo delle serie di Laurent troncate all'ordine $-D(p)$, che è il gruppo dei polinomi di Laurent

in z_p in cui il termine di grado più alto ha grado strettamente minore di $-D(p)$. Indichiamo con $\mathcal{T}_X[D]$ il fascio grattacielo con questi gruppi in ogni punto.
Analogamente dati due divisori D_1 e D_2 su X con $D_1 \leq D_2$, per ogni punto $p \in X$ posso definire il gruppo dei polinomi di Laurent in z_p con termini tali per cui il grado è sempre strettamente compreso fra $-D_1(p)$ e $-D_2(p)$. Il fascio grattacielo associato a questa costruzione è denotato con $\mathcal{T}_X[D_1/D_2]$.

Altri esempi di fascio si possono costruire in modo naturale usando mappe fra spazi topologici. Sia $f: X \to Y$ una mappa continua fra spazi topologici e sia $\mathcal{F}$ un fascio costruito su X. La mappa induce un fascio detto fascio immagine diretta su Y definito dalla relazione:

$$f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$$

dove U è un aperto in Y. Come caso particolare di quest'ultima costruzione, prendo in considerazione uno spazio topologico X e un suo sottospazio Y e la mappa di inclusione $i: X \hookrightarrow Y$, in questo modo se è assegnato su X un fascio $\mathcal{F}$ si può definire il fascio immagine diretta come: $i_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(i^{-1}(U))$ dove U è un aperto in Y il che equivale a considerare sezioni del tipo $\mathcal{F}(U \cap X)$ $\forall U \subset Y$ aperto.

Sia X una Superficie di Riemann compatta, dal momento che ogni funzione olomorfa su una superficie di Riemann compatta è costante, si ha che $\mathcal{O}_X(X) = \mathbb{C}$ e $\mathcal{O}_X^*(X) = \mathbb{C}^*$. Dato che X è connessa, le sezioni globali del fascio delle funzioni meromorfe $\mathcal{M}_X$ formano un campo, esattamente il campo delle funzioni meromorfe su X. Le sezioni di $\mathcal{M}_X^*$ formano, invece, un gruppo moltiplicativo.

Se si fissa un divisore D su X, allora le sezioni globali dello spazio delle funzioni meromorfe con poli limitati da D, $\mathcal{O}_X[D](X)$ è esattamente lo spazio $\mathcal{L}(D)$:

$$\mathcal{O}_X[D](X) = \mathcal{L}(D)$$

La connessione di X assicura che le sezioni globali dei fasci costanti siano i gruppi stessi: $\underline{\mathbb{Z}}(X) = \mathbb{Z}$; $\underline{\mathbb{R}}(X) = \mathbb{R}$; $\underline{\mathbb{C}}(X) = \mathbb{C}$. In modo analogo, se si considera il fascio delle 1-forme olomorfe e un divisore D, si ha che:

$$\Omega_X^1[D](X) = \mathcal{L}^{(1)}(D)$$

Dato un fascio $\mathcal{F}$ definito su uno spazio topologico X, sia U un aperto di X e $p \in U \subset X$, posso definire la spiga in p tramite il quoziente definito da un relazione di equivalenza:

$$\begin{array}{rcl} \sigma_U \in \mathcal{F}(U) & & p \in U \\ \sigma_V \in \mathcal{F}(V) & & p \in V \\ \sigma_U \sim \sigma_V & \Leftrightarrow & \exists W \subset U \cap V \text{ aperto tale che} \\ \sigma_U|_W = \rho_W^U(\sigma_U) & = & \rho_W^V(\sigma_V) = \sigma_V|_W \end{array}$$

Un morfismo di fasci $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è iniettivo se e solo se le mappe $\alpha(U) : \mathcal{F} \to \mathcal{G}(U)$ sono iniettive per ogni aperto $U \subset X$ o, meglio, se e solo se $\forall p \in X$ il morfismo indotto sulle spighe $\mathcal{F}_p \overset{\alpha_p}{\to} \mathcal{G}_p$ è iniettivo. Analogamente diciamo che α è suriettiva se lo è a livello di spighe.
La mappa identità è chiaramente un morfismo di fasci che risulta iniettivo e suriettivo. Il tipo più semplice di morfismi fra fasci è rappresentato dalle mappe di inclusione: siano $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due fasci tali che per ogni aperto $U \subset X$ sia $\mathcal{F}(U) \subset \mathcal{G}(U)$ allora la mappa di inclusione è definita in modo naturale. La richiesta di commutatività con le mappe di restrizione è immediatamente soddisfatta. Esempi di questo tipo di mappa si hanno considerando:

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathbb{Z}} \subset & \underline{\mathbb{R}} & \subset \underline{\mathbb{C}} \\ \underline{\mathbb{C}} \subset & \mathcal{O}_X \subset & \mathcal{M}_X \\ \mathcal{O}_X^* & \subset & \mathcal{M}_X^* \end{array}$$

Se D_1 e D_2 sono due divisori su X tali che $D_1 \leq D_2$ allora

$$\mathcal{O}_X[D_1] \subset \mathcal{O}_X[D_2]$$

Analogamente per le 1-forme

$$\begin{array}{rcl} \Omega_X^1 \subset \mathcal{E}_X^{1,0} & \subset & \mathcal{E}_X^1 \\ \Omega_X^1 & \subset & \mathcal{M}_X^{(1)} \end{array}$$

Un altro tipo di morfismo fra fasci è definito dalle mappe di differenziazione che vengono definite analogamente a quanto riportato nel Capitolo 2:

$$\begin{array}{rcl} d : C_X^\infty & \to & \mathcal{E}_X^1 \\ \partial : C_X^\infty & \to & \mathcal{E}_X^{1,0} \\ \bar{\partial} : C_X^\infty & \to & \mathcal{E}_X^{0,1} \\ \partial\bar{\partial} : C_X^\infty & \to & \mathcal{E}_X^2 \\ \partial : \mathcal{O}_X & \to & \Omega_X^1 \\ \partial : \mathcal{M}_X & \to & \mathcal{M}_X^1 \\ d : \mathcal{E}_X^1 & \to & \mathcal{E}_X^2 \\ \partial : \mathcal{E}_X^{0,1} & \to & \mathcal{E}_X^2 \\ \bar{\partial} : \mathcal{E}_X^{1,0} & \to & \mathcal{E}_X^2 \end{array}$$

Un'altra mappa che spesso viene utilizzata è la mappa esponenziale:

$$exp(2\pi i -) : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^*$$

tale che data una funzione olomorfa f su un aperto U di una Superficie di Riemann X, associa ad essa la funzione $exp(2\pi i f)$ che è una funzione olomorfa mai nulla su U. La mappa esponenziale è un morfismo di fasci e risulta un omomorfismo fra il gruppo additivo $\mathcal{O}_X(U)$ e il gruppo moltiplicativo $\mathcal{O}_X^*(U)$. La mappa esponenziale è suriettiva a livello di fasci ma non di sezioni globali: sia $X = \mathbb{C}^*$ e si consideri la funzione $g = \frac{1}{z} \in \mathcal{O}_X^*$. Dire che exp è suriettiva vuol dire risolvere trovare f soluzione di $exp(2\pi i f) = \frac{1}{z}$, cioè $2\pi i f = log(\frac{1}{z})$ che è una funzione palindroma. Chiaramente posso risolvere l'equazione solo localmente, dunque non ho suriettività a livello di sezioni globali ma solo a livello di fasci.

Torniamo a questioni di carattere generale. Per questa sezione sia X uno spazio topologico ed $U \subset X$ un aperto. Sia data una mappa di fasci $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, allora possiamo definire i seguenti prefasci:

- $Ker(\alpha)(U) = Ker(\alpha(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U))$

- $Coker(a)(U) = Coker(\alpha(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U))$

- $Im(a)(U) = Im(\alpha(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U))$

Proposizione 4.3. *Data una mappa di fasci $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, allora $Ker(\alpha)$ è un fascio.*

Dimostrazione. È necessario verificare le proprietà di fascio dato che quelle di prefascio valgono per il prefascio $\mathcal{F}$. Sia $\sigma \in Ker(\alpha)(U) \subset \mathcal{F}(U)$, e $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento di U. Allora $\sigma|_{U_i} = 0$ implica che $\sigma = 0$ dato che $\mathcal{F}$ è un fascio. In queso modo la prima condizione risulta provata. Si assuma che $\tau_i \in Ker(\alpha)(U_i)$ sia compatibile nelle intersezioni, quindi dal momento che $\mathcal{F}$ è un fascio, esiste $\tau \in \mathcal{F}(U)$ tale che $\forall i \in I\ \tau|_{U_i} = \tau_i$. Dato che α è un morfismo di fasci allora ho che $\alpha(\tau_i) = \alpha(\tau)|_{U_i}$ e $\alpha(\tau_i) = 0\ \forall i \in I$, per la scelta di τ_i. Ora questo vuol dire che $\alpha(\tau)|_{U_i} = 0\ \forall i \in I$ e dato che $\mathcal{G}$ è un fascio, implica che $\alpha(\tau) = 0$. Dunque $\tau \in Ker(\alpha)(U)$. □

Mentre il nucleo di un morfismo di fasci è sempre un fascio, l'immagine ed il coker possono non esserlo.
A tal proposito dati i fasci $\mathbb{Z}_X$ e il fascio C_X^∞, fascio delle funzioni differenziabili, per $U \subset X$ ho l'omomorfismo di inclusione $i_U : \mathbb{Z}_X(U) \to C_X^\infty(U)$ e la mappa esponenziale $e^{2\pi i}(U) : C_X^\infty(U) \to C_X^*(U)$, dove C_X^* è il fascio delle funzioni differenziabili mai nulle. Ora si prenda come spazio topologico S^1

e si usi un ricoprimento con gli aperti $U = (-\epsilon, \pi + \epsilon)$ e $V = (\pi - \epsilon, 2\pi + \epsilon)$.

Il prefascio immagine $U \mapsto (\mathcal{I}m(e^{2\pi i}))(U)$ non è un fascio.
La mappa esponenziale su ogni aperto dà una mappa di prefasci:

$$C_X^{\infty}(U) \stackrel{e^{2\pi i}}{\rightarrow} C_X^{*}(U)$$

Il problema nasce dall'interpretazione di questa mappa come mappa fra fasci: esaminiamo le sezioni del fascio C_X^{∞}:

$$\begin{array}{lcl} f_U : \theta & \rightarrow & \theta \qquad -\epsilon < \theta < \epsilon + \pi \\ f_V : \theta & \rightarrow & \theta \qquad \pi - \epsilon < \theta < 2\pi + \epsilon \\ \text{con} & & f_U|_{U \cap V} = f_V|_{U \cap V} \end{array}$$

Per avere un fascio deve essere che, poiché $\rho(f_U)|_{U\cap V} = \rho(f_V)|_{U\cap V}$, $\rho(f_U)$ si estende ad una sezione globale del fascio C_X^*, ma, per quanto osservato in precedenza, non può esistere tale sezione; quindi il prefascio $\mathcal{I}m(e^{2\pi i})$ non è un fascio.

Un complesso di fasci è una famiglia di fasci $\mathcal{C}_n$ e di mappe $\varphi_n : \mathcal{C}_n \rightarrow \mathcal{C}_{n+1}$ indicate solitamente con:

$$\cdots \stackrel{\varphi_{n-2}}{\rightarrow} \mathcal{C}_{n-1} \stackrel{\varphi_{n-1}}{\rightarrow} \mathcal{C}_n \stackrel{\varphi_n}{\rightarrow} \mathcal{C}_{n+1} \stackrel{\varphi_{n+1}}{\rightarrow} \cdots$$

con la proprietà che $Im(\varphi_{n-1}) \subset Ker(\varphi_n)$, ovvero $\varphi_n \circ \varphi_{n-1} = 0$ per ogni n. Una sequenza esatta o successione esatta lunga è un complesso in cui $Ker(\varphi_n) = Im(\varphi_{n-1})$.

Definizione 4.3. *Una* successione esatta corta di fasci *è una successione di mappe di fasci*

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \ \rightarrow \ \mathcal{F} \ \stackrel{\phi}{\rightarrow} \ \mathcal{G} \rightarrow 0$$

tale che la mappa ϕ sia suriettiva e il fascio $\mathcal{K}$ sia il nucleo (fascio Ker) di ϕ.

Ovviamente posso ottenere una successione esatta di fasci ogni volta che si ha una mappa suriettiva di cui si può identificare il nucleo. Esempi di successioni esatte di fasci verranno presentate e descritte di seguito.

Su una Varietà Complessa la successione

$$\cdots \stackrel{\bar{\partial}}{\rightarrow} \mathcal{E}_X^{p,q} \stackrel{\bar{\partial}}{\rightarrow} \mathcal{E}_X^{p,q+1} \stackrel{\bar{\partial}}{\rightarrow} \mathcal{E}_X^{p,q+2} \stackrel{\bar{\partial}}{\rightarrow} \cdots$$

è una sequenza esatta lunga in cui le mappe sono definite in modo che se ω è una (p,q)-forma definita da:

$$\omega = \sum_{I,J} a_{I,J} \, dz_I \wedge d\bar{z}_J \quad |I| = p \ \text{ e } \ |J| = q$$

$$dz_I = dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \quad \text{con} \;\; i_1 < \cdots < i_p$$
$$d\bar{z}_J = d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_q} \quad \text{con} \;\; j_1 < \cdots < j_q$$

allora i morfismi sono dati da:

$$\begin{aligned} \bar{\partial} : \mathcal{E}_X^{p,q} \quad &\rightarrow \quad \mathcal{E}_X^{p,q+1} \\ \bar{\partial}\omega \quad &= \quad \sum_{\substack{I,J,K \\ |I|=p \\ |J|=q}} \frac{\partial a_{I,J}}{\partial \bar{z}_K} d\bar{z}_K \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J \end{aligned}$$

Su una Superficie di Riemann la successione

$$0 \rightarrow \underline{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{O}_X \overset{d=\partial}{\rightarrow} \Omega_X^1 \rightarrow 0 \tag{4.1}$$

è esatta dal momento che il nucleo di d è l'insieme delle funzioni costanti, la suriettività si ha dal Lemma di Poincar$\acute{e}$. La mappa esponenziale induce una successione:

$$0 \rightarrow \underline{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{O}_X \overset{exp(2\pi i -)}{\rightarrow} \mathcal{O}_X^* \rightarrow 0$$

che risulta esatta dal momento che il suo nucleo è dato dalle funzioni a valori interi.
Si consideri la successione

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{O}_X \quad \rightarrow \quad C_X^\infty \quad &\overset{\bar{\partial}}{\rightarrow} \quad \mathcal{E}_X^{0,1} \rightarrow 0 \\ f \quad &\mapsto \quad \bar{\partial} f \end{aligned}$$

È esatta dal momento che f è olomorfa se e solo se soddisfa le equazioni di Cauchy-Riemann e questo equivale a chiedere che $\bar{\partial} f = 0$. Inoltre la suriettività segue dal Lemma $\bar{\partial}$-Poincar$\acute{e}$.

Analogamente è esatta la successione

$$0 \rightarrow \Omega_X^1 \quad \rightarrow \quad \mathcal{E}_X^{1,0} \overset{\bar{\partial}}{\rightarrow} \mathcal{E}_X^{1,1} \cong \mathcal{E}_X^2 \rightarrow 0$$

Per ogni divisore D definito su X e per ogni $p \in X$ risulta esatta la successione:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X [D-p] \quad \rightarrow \quad \mathcal{O}_X [D] \quad \overset{eval_p}{\rightarrow} \quad \mathbb{C}_p \rightarrow 0 \tag{4.2}$$

Infatti, sia $p \in U$, allora ricordo che

$$\mathcal{O}_X [D-p] (U) = \{f \in \mathcal{M}(U) : div(f) + D - p \geq 0\}$$

dove la mappa $eval_p$ manda la funzione $f = \sum_{n \geq -D(p)} a_n z^n \in \mathcal{O}_X [D]$ nel coefficiente $a_{-D(p)}$. La mappa $eval_p$ si dice mappa di valutazione.

Per concludere questa serie di esempi, siano D_1 e D_2 due divisori definiti su X, allora le sequenze :

$$0 \to \mathcal{O}_X[D_1] \ \to \ \mathcal{M}_X \ \stackrel{\alpha_{D_1}}{\to} \ \mathcal{T}_X[D_1] \to 0$$
$$0 \to \mathcal{O}_X[D_1] \ \to \ \mathcal{O}_X[D_2] \ \stackrel{\alpha_{D_1/D_2}}{\to} \ \mathcal{T}_X[D_1/D_2\ ] \to 0$$

sono esatte.

4.3 Coomologia di Cěch

La Coomologia di Cěch è una costruzione che associa ad ogni fascio $\mathcal{F}$ su X una successione di gruppi contenenti informazioni sulle proprietà globali di $\mathcal{F}$. Molti problemi di natura geometrica sono facilmente risolvibili a livello locale mentre l'equivalente dal punto di vista globale, problema spesso legato a questioni relative all'incollamento, richiede strumenti appositi, i fasci e i gruppi di coomologia associati forniscono il linguaggio e le strutture adatte a risolvere questo tipo di questioni.

Definizione 4.4. *Sia $\mathcal{F}$ un fascio su X, sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di X e $q \geq 0$ un intero positivo:*

$$C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{(i_0,\cdots,i_q)\in I^{q+1}} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_q})$$

si dice gruppo delle q-cocatene *di $\mathcal{F}$ relativamente ad $\mathcal{U}$.*

Sia α un morfismo di fasci: $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ definiti sullo spazio topologico X, allora α induce una mappa fra cocatene:

$$\alpha : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

$$(f_{i_0,\cdots,i_q}) \mapsto (\alpha(f_{i_0,\cdots,i_q}))$$

Definizione 4.5. *Dato un fascio $\mathcal{F}$ su uno spazio topologico X, considerino i gruppi delle q-cocatene associati al fascio: $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Esiste un operatore, detto* operatore di cobordo*, δ, fra i gruppi di cocatene definito come:*

$$\delta_q : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

$$(f_{i_0,\cdots,i_q}) \mapsto (g_{i_0,\cdots,i_{q+1}}) \qquad g_{i_0,\cdots,i_{q+1}} = \sum_{k=o}^{q+1} (-1)^k r(f_{i_0,\cdots,\hat{i_k},\cdots,i_{q+1}})$$

Con r mappa di restrizione di $\mathcal{F}$ corrispondente a :

$$U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_{q+1}} \subset U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_{k-1}} \cap U_{i_{k+1}} \cap \cdots U_{i_{q+1}}$$

Nei casi elementari l'espressione dell'operatore di cobordo è relativamente semplice:

- $\delta_0 : C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \qquad (f_i) \mapsto (g_{ij} = f_i - f_j)$

- $\delta_1 : C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \qquad (f_{ij}) \mapsto (g_{ijk} = f_{jk} - f_{ik} + f_{ij})$

In particolare $\delta_0(f_i) = 0$ se e solo se $f_i = f_j$ su $U_i \cap U_j \quad \forall i, j$ cioè se le f_i sono compatibili e quindi si incollano a dare una sezione globale. Una volta definito l'operatore di cobordo è immediato definire il nucleo e l'immagine di questo operatore: il nucleo di δ_q si indica con $Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ e si dice spazio dei q-cocicli. L'immagine di δ_{q-1} si indica con $B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ e si dice spazio dei q-cobordi. Inoltre, si può vedere facilmente che $\delta_q \circ \delta_{q-1} = 0 \quad \forall q \geq 0$ e quindi $B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \subset Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Allora si può dare la seguente definizione.

Definizione 4.6. *Il gruppo quoziente:*

$$H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \frac{Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})}{B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})}$$

si dice q-esimo gruppo di coomologia *di* $\mathcal{F}$ *rispetto ad* $\mathcal{U}$.

Il gruppo $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ ha un'interpretazione semplice:

Lemma 4.1. *Lo 0-esimo gruppo di coomologia rispetto ad ogni ricoprimento è isomorfo al gruppo delle sezioni globali:*

$$H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \simeq \mathcal{F}(X)$$

La dimostrazione segue dalla condizione di incollamento contenuta nella definizione di fascio.

Gli operatori di cobordo commutano con le mappe indotte da morfismi di fasci: sia $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo, allora α induce una mappa fra i gruppi di coomologia:

$$\alpha_q^*(\mathcal{U}) : H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^q(\mathcal{U}, \mathcal{G})$$

I gruppi di coomologia appena introdotti, però, presentano una dipendenza del ricoprimento $\mathcal{U}$ scelto per lo spazio topologico X. Voglio quindi definire un gruppo che superi tale dipendenza. Per poter far ciò sono necessarie alcune premesse che riporto di seguito senza dimostrazione:

- Dato un ricoprimento $\mathcal{U}$ di uno spazio topologico X, dare un raffinamento $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ di $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$, in simboli $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$, significa che esiste una mappa di raffinamento $R(\mathcal{V}, \mathcal{U}) : J \to I$ con $V_j \subset U_{R(j)}\ \forall j \in J$. La mappa $R(\mathcal{V}, \mathcal{U})$ induce una mappa

$$R_q^*(\mathcal{V}, \mathcal{U}) : H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

$$f_{i_0,\cdots,i_q} \mapsto g_{j_0,\cdots,j_q} = (f_{R(j_0),\cdots,R(j_q)})|_{V_{j_0}\cap\cdots\cap V_{j_q}}$$

- La mappa $R_q^*(\mathcal{V},\mathcal{U})$ dipende solo dai ricoprimenti $\mathcal{V}$ e $\mathcal{U}$ e non dalla mappa di raffinamento scelta. La indico quindi con $h(\mathcal{V},\mathcal{U})$.

- Se $\mathcal{W} \prec \mathcal{V} \prec \mathcal{U}$ allora $h(\mathcal{W},\mathcal{U}) = h(\mathcal{V},\mathcal{U}) \circ h(\mathcal{W},\mathcal{V})$.

- la mappa $h(\mathcal{V},\mathcal{U})$ per $H^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ è iniettiva.

Le proprietà enunciate garantiscono che l'insieme di gruppi:

$$\{H^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) : \mathcal{U} \quad \text{ricoprimento aperto di } X\}$$

con le mappe $h(\mathcal{V},\mathcal{U})$ costituisce un sistema diretto di gruppi. Quindi posso dare la seguente definizione:

Definizione 4.7. *Siano $\mathcal{F}$ un fascio e $q \geq 0$ un intero , si definisce il* q-esimo gruppo di Coomologia di Cěch di $\mathcal{F}$ *su X il gruppo definito da:*

$$H^q(X,\mathcal{F}) := \underline{lim}_{\,\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

Ai livelli di coomologia più bassa si ha che:

Lemma 4.2.

$$H^0(X,\mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X)$$

$$H^1(X,\mathcal{F}) = 0 \;\; \textit{se e solo se} \;\; H^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) = 0 \quad \forall \mathcal{U} \;\; \textit{ricoprimento aperto.}$$

Torniamo ora alla trattazione relativa alle Superfici di Riemann e presentiamo alcuni dei risultati sui fasci e sulla coomologia di Cěch relativamente a tali spazi. Innanzitutto vale il seguente:

Teorema di Leray. *Dato un ricoprimento finito $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ di X spazio topologico se $\mathcal{U}$ è aciclico per $\mathcal{F}$ cioè se $H^q(U_{i_1}\cap\cdots\cap U_{i_p},\mathcal{F}) = 0 \; \forall i_1 \dots i_p \in I$ $\forall q > 0$, allora $H^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) = H^p(X,\mathcal{F}) \quad \forall p \geq 0$.*

La Coomologia di Cěch offre strumenti utili riferiti alla successioni esatte:

Teorema 4.1. *Sia X una Superficie di Riemann su cui è definita una successione esatta corta di fasci:*

$$0 \to \mathcal{E} \overset{\alpha_1}{\to} \mathcal{F} \overset{\alpha_2}{\to} \mathcal{G} \to 0$$

Allora si può definire una successione di omomorfismi di bordo

$$\Delta_q : H^q(X,\mathcal{G}) \to H^{q+1}(X,\mathcal{E})$$

tale che sia esatta la successione di gruppi di coomologia:

$$\begin{aligned} 0 \quad \to \quad & H^0(X,\mathcal{E}) \stackrel{\alpha_1}{\to} H^0(X,\mathcal{F}) \stackrel{\alpha_2}{\to} H^0(X,\mathcal{G}) \stackrel{\Delta_0}{\to} \\ \to \quad & H^1(X,\mathcal{E}) \stackrel{\alpha_1^*}{\to} H^1(X,\mathcal{F}) \stackrel{\alpha_2^*}{\to} H^1(X,\mathcal{G}) \stackrel{\Delta_1}{\to} \\ \to \quad & H^2(X,\mathcal{E}) \stackrel{\alpha_1^*}{\to} H^1(X,\mathcal{F}) \stackrel{\alpha_2^*}{\to} H^2(X,\mathcal{G}) \stackrel{\Delta_2}{\to} \cdots \end{aligned}$$

L'omomorfisomo di bordo $\Delta_0 : H^0(X,\mathcal{G}) \to H^1(X,\mathcal{E})$ è definito nel modo che descrivo di seguito. Sia $g \in H^0(X,\mathcal{G})$, allora essendo per ipotesi α_2 suriettivo, esistono un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ e $f_i \in C^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ tali che $\alpha_2(f_i) = g|_{U_i}$ $\forall i \in I$. Quindi $\alpha_2(f_i - f_j) = 0$ su $U_i \cap U_j$. Per l'esattezza della successione esatta corta si ha, allora, che esiste $e_{ij} \in \mathcal{E}(U_i \cap U_j)$ tale che $\alpha_1(e_{ij}) = f_i - f_j$. Sulle intersezioni $U_i \cap U_j \cap U_k$ si ha che $\alpha_1(e_{ij} + e_{jk} - e_{ik}) = 0$, quindi per ipotesi $e_{ij} + e_{jk} - e_{ik} = 0$ cioè $(e_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{E})$. Definisco allora $\Delta_0(g) = [(e_{ij})] \in H^1(X,\mathcal{E})$.

Le sequenze esatte corte di fasci mettono in relazione proprietà locali di spazi diversi, l'esattezza della catena di coomologia permette poi di ricondurre il calcolo dei gruppi H^q, ovvero spazi di forme o funzioni, a quello dei gruppi di coomologia a livelli più alti. In particolare la catena ci dà informazioni di facile interpretazione quando si conosce a priori l'annullamneto di uno dei gruppi H^q.

Per poter dare alcuni criteri di calcolo dei gruppi di Coomologia di Cěch è necessario descrivere brevemente uno strumento classico che viene modificato per essere utilizzato nella dimostrazione in modo agevole: si tratta della partizione dell'unità a valori interi.

Lemma 4.3. *Sia X uno spazio topologico e sia $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un ricoprimento aperto di X. Allora eiste una famiglia di funzioni a valori interi $\{\varphi_i\}$ definita su X tale che:*

- *ogni punto $p \in X$ appartiene solo ad un numero finito dei supporti delle funzioni φ_i;*
- $\forall p \in X$ *si ha che* $\sum_i \varphi_i(p) = 1$*;*
- *Supp*$(\varphi) \subset U_i$ *per ogni i.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di X, tale che I sia totalmente ordinato. Si definisca la collezione $\{\varphi_i\}$ nel seguente modo:

$$\varphi_i(p) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in U_i \backslash (\cup_{j<i} U_j) \\ o & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa famiglia di funzioni soddisfa propriamente il lemma e le relative proprietà. □

Queste funzioni sono generalemente discontinue. Se f è una sezione di un fascio grattacielo S_p su un aperto U e se φ è una funzione della partizione dell'unità a valori interi, allora anche φf è una sezione di S_p su U. Quindi questo tipo di funzione può essere usato nelle dimostrazioni relative al calcolo dei gruppi di coomologia in modo da semplificare notevolmente il ragionamento.

Proposizione 4.4. *Sia X una Superficie di Riemann compatta di genere g e G un gruppo abeliano, allora dato $p \in X$:*

1. $H^q(X, G_p) = 0 \quad \forall q \geq 1$ *dove G_p è il fascio grattacielo definito dal gruppo G*

2. $H^q(X, C^\infty) = 0 \; \forall q \geq 1$

3. $H^q(X, \mathcal{E}^1) = 0 \;\; H^q(X, \mathcal{E}^{(0,1)}) = H^q(X, \mathcal{E}^{(1,0)}) = 0 \; \forall q \geq 1$

4. $H^1(X, G) \cong G^{2g} \;\; H^2(X, G) \cong G \;\; H^q(X, G) = 0 \; \forall q \geq 3$

5. $H^q(X, \mathcal{O}_X(D)) = 0 \; \forall q \geq 2 \;\; \forall D \in Div(X)$

6. $H^q(X, \Omega_X(D)) = 0 \; \forall q \geq 2 \;\; \forall D \in Div(X)$

Dimostrazione. (1) Dimostro solo l'annullamento di H^1. Per far ciò ricorro al Lemma di Leray e mi riconduco a verificare che $H^1(\mathcal{U}, G_p) = 0 \quad \forall \mathcal{U}$ ricoprimento aperto finito. Fisso $\mathcal{U}$, (f_{ij}) 1-cociclo e $\{\epsilon_i\}$ partizione dell'unità a valori interi relativa ad $\mathcal{U}$. Considero $(\epsilon_j f_{ij})$ e osservo che è una sezione, la estendo a zero fuori da $supp(\epsilon_j)$ ottenendo così una sezione su tutto U_i. Se definisco $g_i = -\sum_j \epsilon_j f_{ij}$ ho ancora una sezione su U_i. Inoltre

$$g_j - g_i = \sum_k \epsilon_k (f_{ik} - f_{jk}) = \sum_k \epsilon_k f_{ij} = f_{ij}$$

Quindi f_{ij} è un cobordo oltre che un cociclo. (2) e (3) : Le dimostrazioni sono simili alla precedente usando partizioni dell'unità di classe C^∞. (4) Deriva dal fatto (che non sarà dimostrato perchè al di fuori dello scopo della trattazione) che i gruppi di Coomologia di Cěch per fasci localmente costanti coincidono con i gruppi di coomologia simpliciale per ogni spazio triangolabile quindi anche per ogni Superficie di Riemann compatta. (5) Se $D = 0$ allora per le formule di Cauchy-Riemann si ha la sequenza esatta corta:

$$0 \to \mathcal{O} \xrightarrow{i} C^\infty \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}^{(0,1)} \to 0$$

che induce sequenze esatte del tipo:

$$H^q(X,\mathcal{E}^{(0,1)}) \stackrel{\Delta_q}{\to} H^{q+1}(X,\mathcal{O}) \stackrel{i^*}{\to} H^{q+1}(X,C^\infty) \qquad \forall q\geq 1$$

Ma per quanto visto

$$H^q(X,\mathcal{E}^{(0,1)}) = H^{q+1}(X,C^\infty) = 0 \qquad \forall q\geq 1$$

allora

$$H^{q+1}(X,\mathcal{O}) = 0 \qquad \forall q\geq 1$$

Nel caso generale se $D_1 \leq D_2$ è esatta:

$$0 \to \mathcal{O}(D_1) \to \mathcal{O}(D_2) \to \mathcal{T}(D_1\backslash D_2) \to 0$$

Quindi è esatta:

$$H^{q-1}(X,\mathcal{T}(D_1\backslash D_2)) \to H^q(X,\mathcal{O}(D_1)) \to H^q(X,\mathcal{O}(D_2)) \to H^q(X,\mathcal{T}(D_1\backslash D_2))$$

$\forall q\geq 1$ Ma per $q\geq 2$:

$$H^{q-1}(X,\mathcal{T}(D_1\backslash D_2)) = H^q(X,\mathcal{T}(D_1\backslash D_2)) = 0$$

allora

$$H^q(X,\mathcal{O}(D_1)) \cong H^q(X,\mathcal{O}(D_2)) \;\; \forall q\geq 2$$

Scrivendo $D = D_1 - D_2$ con $D_1, D_2 \geq 0$ si ottiene

$$H^q(X,\mathcal{O}(D)) \cong H^q(X,\mathcal{O}(D_1)) \cong H^q(X,\mathcal{O}) = 0 \;\; \forall q\geq 2$$

(6)Segue dall'isomorfismo di fasci:

$$\mathcal{O}(D) \cong \Omega(D-K)$$

□

Dalla succesione esatta corta:

$$0 \to \mathcal{O}_X \;\; \to \;\; C^\infty_X \;\; \stackrel{\bar\partial}{\to} \;\; \mathcal{E}^{0,1}_X \to 0$$

si può ottenere una successione lunga che risulta semplice in quanto quasi tutti i gruppi di coomologia sono nulli, si ha infatti:

$$0 \to \mathcal{O}_X(X) \;\; \to \;\; C^\infty_X(X) \;\; \stackrel{\bar\partial}{\to} \;\; \mathcal{E}^{0,1}_X(X) \stackrel{\alpha}{\to} H^1(X,\mathcal{O}_X) \to 0$$

e perciò si ha:

$$H^{0,1}_{\bar\partial}(X) = \frac{\mathcal{E}^{0,1}_X(X)}{\bar\partial(C^\infty_X(X))} = \frac{\mathcal{E}^{0,1}_X(X)}{Ker\alpha} \cong \mathcal{I}m\;\alpha = H^1(X,\mathcal{O})$$

Analogamente:

$$0 \to \Omega^1_X \;\; \to \;\; \mathcal{E}^{1,0}_X \;\; \stackrel{\bar\partial}{\to} \;\; \mathcal{E}^{1,1}_X \cong \mathcal{E}^2_X \to 0$$

$$0 \to H^0(X,\Omega^1_X) \;\; \to \;\; \mathcal{E}^{1,0}_X(X) \;\; \stackrel{\bar\partial}{\to} \;\; \mathcal{E}^2_X(X) \stackrel{\alpha}{\to} H^1(X,\Omega^1_X) \to 0$$

$$H^{1,1}_{\bar\partial}(X) = \frac{\mathcal{E}^{1,1}_X(X)}{\bar\partial(\mathcal{E}^{1,0}_X(X))} \cong H^1(X,\Omega^1_X)$$

Capitolo 5

Il Teorema di Riemann-Roch

5.1 Il Teorema di Riemann-Roch

Sia X una Superficie di Riemann compatta di genere g, valgono i seguenti risultati:

Dualità di Serre. *Sia X una Superficie di Riemann compatta e sia $D \in Div(X)$, allora:*

$$H^1(X, \mathcal{O}_X[D]) \cong H^0(X, \mathcal{O}_X[K_X - D])^*$$

dove K_X è un divisore canonico.

Non verrà riportata la dimostrazione del teorema di Dualità di Serre, mentre dimostreremo il Teorema di Riemann e il Teorema di Riemann-Roch.

Per la dimostrazione del Teorema di Riemann-Roch risulterà fondamentale anche la seguente caratterizzazione della dimensione in una successione lunga: sia X una Superficie di Riemann su cui è definita una successione esatta lunga di fasci:

$$0 \to A_0 \stackrel{\alpha_0}{\to} A_1 \stackrel{\alpha_1}{\to} A_2 \stackrel{\alpha_2}{\to} \cdots \stackrel{\alpha_{n-1}}{\to} A_n \to 0$$

dove ciascun A_i risulta finito dimensionale, allora

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i dim\ A_i = 0$$

infatti la successione esatta lunga si può spezzare in una collezione di successioni esatte corte del tipo:

$$\begin{aligned}
0 &\to A_0 \stackrel{\alpha_0}{\to} A_1 \to Ker(\alpha_2) \to 0 \\
0 &\to Ker(\alpha_2) \to A_2 \to Ker(\alpha_3) \to 0 \\
&\dots \\
0 &\to Ker(\alpha_{n-1}) \to A_{n-1} \to A_n \to 0
\end{aligned}$$

dove indicato con $a_i = dim\ A_i$ si ha

$$\begin{aligned} &a_0 - a_1 + dim(Ker(\alpha_2)) = 0 \\ &dim(Ker(\alpha_2)) - a_2 + dim(Ker(\alpha_3)) = 0 \end{aligned}$$

procedendo nello stesso modo fino ad esaurire gli elementi della successione e sommando, si ha che la somma a segni alterni delle dimensioni è zero.

Teorema di Riemann. *Sia X una Superficie di Riemann compatta di genere g allora:*

$$dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{O}_X [K_X]) = g$$

dove $K_X = div(\omega)$ e ω è una 1-forma meromorfa.

Dimostrazione. Innanzitutto osserviamo che

$$\Omega^1_X \cong \mathcal{O}_X [K_X]$$

dove K_X è un divisore canonico. Si consideri la successione [4.1] che induce una successione lunga in coomologia:

$$\begin{aligned} 0 \quad \rightarrow \quad & H^0(X, \underline{\mathbb{C}}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^0(X, \Omega^1_X) \rightarrow \\ \rightarrow \quad & H^1(X, \underline{\mathbb{C}}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(X, \Omega^1_X) \rightarrow \\ \rightarrow \quad & H^2(X, \underline{\mathbb{C}}) \rightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Analizziamo la successione sfruttando alcuni risultati contenuti nella Proposizione 4.4:

$$\begin{aligned} &H^0(X, \underline{\mathbb{C}}) = \mathbb{C} \quad H^0(X, \mathcal{O}_X) = \mathbb{C} \\ &H^2(X, \underline{\mathbb{C}}) = \mathbb{C} \quad H^2(X, \mathcal{O}_X) = H^{0,2}_{\bar\partial}(X) = 0 \\ &H^1(X, \underline{\mathbb{C}}) \cong \mathbb{C}^{2g} \end{aligned}$$

inoltre usando la Dualità di Serre ho che

$$H^1(X, \Omega^1_X) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X [K_X]) \cong H^0(X, \mathcal{O}_X)^* = \mathbb{C}$$

e che

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \cong H^0(X, \mathcal{O}_X [K_X])^* = H^0(X, \Omega^1_X)^*$$

La successione lunga in coomologia diventa quindi:

$$0 \rightarrow H^0(X, \Omega^1_X) \rightarrow \mathbb{C}^{2g} \rightarrow H^0(X, \Omega^1_X)^* \rightarrow 0$$

e passando alle dimensioni si ha che:

$$dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \Omega^1_X) = g$$

□

Passiamo quindi al teorema centrale del capitolo:

Teorema di Riemann-Roch. *Sia X una Superficie di Riemann compatta e sia $D \in Div(X)$, allora si ha che*

$$dim_{\mathbb{C}}\ \mathcal{L}(D) = deg(D) + 1 - g + dim_{\mathbb{C}}\ \mathcal{L}(K - D)$$

dove: g è il genere della Superficie di Riemann X, e $K = div(\omega)$ con $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$ non nullo è un qualunque divisore canonico.

Per definizione si ha che $dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{L}(D)) = dim_{\mathbb{C}}H^0(X, \mathcal{O}_X[D])$ e per il Teorema di dualità di Serre si ha che $dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{L}(K-D)) = dim_{\mathbb{C}}H^0(X, \mathcal{O}_X[K_X - D]) = dim_{\mathbb{C}}H^1(X, \mathcal{O}_X[D])$. Ponendo

$$h^i(D) = dim_{\mathbb{C}}\ H^i(X, \mathcal{O}_X[D])$$

il Teorema di Riemann-Roch si riscrive come:

$$h^0(D) - h^1(D) = deg(D) - g + 1$$

Dimostrazione. La dimostrazione procede per induzione.

Sia $D = 0$ il divisore nullo, mostro che il teorema vale in questo caso:

$$h^0(0) - h^1(0) = -g + 1$$

dal momento che $h^0(0) = dim_{\mathbb{C}}\ H^0(X, \mathcal{O}_X[0]) = dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C} = 1$ e per il Teorema di dualità di Serre $h^1(0) = h^0(\Omega^1_X)$ che per il Teorema di Riemann coincide con g.

$$1 - h^0(\Omega^1_X) = -g + 1$$

come si voleva mostrare. Quindi il teorema risulta valido per $D = 0$. Supponiamo per induzione che sia valido per un divisore D generico e mostriamo che è valido per $D - p$ e $D + p$ dove $p \in X$.

A tal scopo utilizziamo la seguente successione esatta [4.2], che induce la successione lunga in coomologia:

$$0 \to H^0(X, \mathcal{O}_X\,[D-p]) \to H^0(X, \mathcal{O}_X\,[D]) \to \mathbb{C} \to$$

$$\to H^1(X, \mathcal{O}_X\,[D-p]) \to H^1(X, \mathcal{O}_X\,[D]) \to 0$$

e quindi passando alle dimensioni

$$h^0(D-p) - h^0(D) + 1 - h^1(D-p) + h^1(D) = 0$$

poiché si tratta di una successione esatta di spazi finito dimensionali dato che tali sono gli spazi $\mathcal{L}(D)$ e $\mathcal{L}^1(D)$. Allora

$$h^0(D) - h^1(D) = h^0(D-p) - h^1(D-p) + 1$$

Riemann-Roch vale per D quindi:

$$d - g + 1 = h^0(D - p) - h^1(D - p) + 1$$

Inoltre se $deg(D) = d$ allora $deg(D - p) = d - 1$, dunque:

$$h^0(D - p) - h^1(D - p) = d - g = (d - 1) - g + 1 = deg(D - p) - g + 1$$

Quindi ho mostrato che il teorema vale per $D - p$.

Passiamo a $D + p$, analogamente a prima consideriamo la successione esatta [4.2] e la relativa successione in coomologia:

$$0 \to H^0(X, \mathcal{O}_X[D]) \to H^0(X, \mathcal{O}_X[D + p]) \to \mathbb{C} \to$$

$$\to H^1(X, \mathcal{O}_X[D]) \to H^1(X, \mathcal{O}_X[D + p]) \to 0$$

e passiamo alle dimensioni

$$h^0(D) - h^0(D + p) + 1 - h^1(D) + h^1(D + p) = 0$$

$$h^0(D) - h^1(D) = h^0(D + p) - h^1(D + p) - 1$$

$$d - g + 1 = h^0(D + p) - h^1(D + p) - 1$$

Come prima se $deg(D) = d$ allora $deg(D + p) = d + 1$, segue quindi che

$$h^0(D + p) - h^1(D + p) = d - g + 2 = (d + 1) - g + 1 = deg(D + p) - g + 1$$

Allora Riemann-Roch vale per $D + p$.
Siccome Riemann-Roch vale per $D = 0$, per $D + p$ e per $D - p$ $\forall p \in X$ allora vale per ogni divisore dato che ogni divisore si ottiene da 0 aggiungendo e togliendo punti. $\square$

5.2 Applicazioni del teorema

Caso di divisori 'abbastanza positivi': se $deg(D) \geq 2g - 1$, allora

$$deg(K - D) = deg(K) - deg(D) \leq 2g - 2 - (2g - 1) = -1 < 0$$

dove il grado di $K = div(\omega)$ con $\omega \in \mathcal{M}^1$ è uguale a $2g - 2$. Dunque il termine $dim_{\mathbb{C}}\mathcal{L}(K - D)$ è nullo e quindi si ha la formula semplificata:

$$dim_{\mathbb{C}}\mathcal{L}(D) = deg(D) + 1 - g \geq 2g - 1 + 1 - g = g$$

Se usiamo divisori D con $deg(D) \geq g$ allora otteniamo $dim_{\mathbb{C}}\mathcal{L}(D) \geq 1$. Si tratta, quindi, di stime di esistenza di funzioni con limiti fissati sui poli permessi, per esempio se $D = (g + 1) \cdot p$ con $p \in X$, otteniamo che $dim_{\mathbb{C}}\mathcal{L}((g + 1) \cdot p) \geq deg((g + 1) \cdot p) + 1 - g = 2$ e dunque esistono funzioni non costanti aventi poli solo nel fissato punto $p \in X$ e in nessun altro punto di X.

Analogamente consideriamo $t \in X$ e i divisori $D_n = n{\cdot}t$ con n sufficientemente grande (per esempio maggiore di $2g-2$ per poter usare la formula semplificata); abbiamo allora $dim_{\mathbb{C}}\mathcal{L}(D_n) = n+1-g$ e $dim_{\mathbb{C}}\mathcal{L}(D_{n+1}) = n+2-g$, da cui segue che $dim_{\mathbb{C}}\mathcal{L}(D_{n+1}) > dim_{\mathbb{C}}\mathcal{L}(D_n)$ e dunque esistono funzioni $f_{n+1} \in \mathcal{L}(D_{n+1})\backslash\mathcal{L}(D_n)$ per ogni $n > 0$. In particolare esistono funzioni meromorfe (per esempio $\frac{f_{n+1}}{f_n}$) aventi polo semplice in t.

Nel caso della Sfera di Riemann, dalla descrizione fatta delle funzioni meromorfe come quozienti di polinomi omogenei di ugual grado, otteniamo che

$$\mathcal{L}(D) = \begin{cases} \{0\} & \text{se } deg(D) < 0 \\ \left\{f(x)\prod_i (x-p_i)^{-ord_{p_i}(D)} \mid deg\, f(x) \leq deg(D)\right\} & \text{se } deg(D) \geq 0 \end{cases}$$

dove $f(x)$ è un polinomio di grado limitato dal grado del divisore. Si ha dunque che:

$$dim_{\mathbb{C}}\mathcal{L}(D) = \begin{cases} 0 & \text{se } deg(D) < 0 \\ deg(D)+1 & \text{se } deg(D) \geq 0 \end{cases}$$

che è la formula di Riemann-Roch per la sfera in quanto $g = 0$.

Nel caso dei Tori complessi, ($g = 1$),dal Teorema di Riemann-Roch otteniamo che:

$$dim_{\mathbb{C}}\mathcal{L}(D) = \begin{cases} 0 & \text{se } deg(D) < 0 \\ 0 & \text{se } deg(D) = 0 \text{ e } D \not\sim 0 \\ 1 & \text{se } deg(D) = 0 \text{ e } D \sim 0 \\ deg(D) & \text{se } deg(D) > 0 \end{cases}$$

dal momento che $dim_{\mathbb{C}}\mathcal{L}(D) = deg(D)+1-1+dim_{\mathbb{C}}\mathcal{L}(K-D) = deg(D)+ dim_{\mathbb{C}}\mathcal{L}(K-D)$. Ora dal momento che su un toro i divisori canonici sono linarmente equivalenti al divisore nullo, $K \sim 0$, si ha che $dim_{\mathbb{C}}\mathcal{L}(K-D) = dim_{\mathbb{C}}\mathcal{L}(-D)$. Ora poiché $deg(D) > 0$, $\mathcal{L}(-D) = \{0\}$, allora $dim_{\mathbb{C}}\mathcal{L}(D) = deg(D)$.

Bibliografia

[1] Rick Miranda *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, American Mathematical Society;

[2] P.A. Griffiths *Introduction to Algebraic Curves*, American Mathematical Society;

[3] P.A. Griffiths, J.Harris *Principles of Algebraic Geometry*,Wiley & sons;

[4] Walter Rudin *Analisi reale e complessa*, Bollati Boringhieri.

Ringraziamenti

Dopo aver riletto per la centesima volta tutto quello che ho scritto ed aver corretto di nuovo Reimann scritto al posto di Riemann, finalmente mi accorgo di esser giunto alla conclusione del mio lavoro. Rimangono da scrivere i ringraziamenti ... sembrerebbe una cosa da poco, ma vi assicuro che non lo per niente: spero di non dimenticare nessuno e se lo farò ... beh ci sarà modo e tempo per rimediare.

Sono a Pavia ormai da tre anni, tre anni ricchi di persone di eventi di ricordi, tre anni in cui ho capito tante cose ... Ho imparato... che nessuno perfetto... Finch non t'innamori. Ho imparato che la vita dura ... ma io lo sono di più! E non mi riferisco solo alla matricola... Ho imparato che le opportunità non vanno mai perse. Ho imparato che quando serbi rancore e amarezza la felicità va da un'altra parte. Ho imparato che bisognerebbe sempre usare parole buone perch domani forse si dovranno rimangiare. Ho imparato che non posso scegliere come mi sento, ma posso sempre farci qualcosa. Ho imparato che meno tempo spreco più cose faccio, anche se a volte proprio difficile...

In primo luogo, un ringraziamento particolare va alla mia Relatrice, la dottoressa Paola Frediani, a cui sono grato sia per la grande disponibilità, sia per l'immensa competenza e pazienza con cui mi ha guidato nella stesura della tesi.
Un 'grazie' di cuore per i miei genitori e per la mia sorellina che mi sono stati sempre vicino, e per i miei nonni a cui voglio fare i complimenti e i più sinceri auguri per il loro cinquantesimo di matrimonio che ricorre proprio nella giornata di oggi.

Bene, adesso passiamo agli amici ... Ghido, cosa dire, grazie per la tua amicizia, senza di te probabilmente avrei frequentato un quarto delle lezioni e mi sarei ritirato in letargo, per me sei un po' come il ranger per l'orso Yoghi, o dovrei dire come Bubu?
Nat, il mio consulente LaTeXpreferito, grazie per tutto, sei come un fratellone acquisito, con la mia stessa passione per i manga(anche se decisamente più consapevole e informata) e per i film (vedi prima), a proposito quando

andiamo a vedere il prossimo?
Turcato, grazie di tutto, grazie per la splendida partita di ieri sera, anche se i matematici hanno perso 2 set a 3, è stato bellissimo, grazie per la competenza scout e per il 'contenuto umano' di grande rilievo oltre che di gran profilo.
Matteo e Giorgio, la super coppia di medici: Giorgio, non so se riuscirai a sopportarmi quest'anno, avermi come vicino di stanza è complicato, ma ha anche i suoi vantaggi ... grazie ... Matteo, grazie di tutto, grazie per la partita, grazie per la pizza che offrirai a me e alla Francesca, grazie per il tuo modo di ragionare che mi manda in paranoia ma mi fa bene ... Nicolò: sei insostituibile, e sai che su di me potrai sempre contare.
Diego, non ci sono parole, grazie e scusa se alle volte non rispondo a messaggi e e-mail (so che starai dicendo che succede sempre) , ma mi metterò di impegno ... Sandokan: in bocca al lupo per oggi, anche tu condividi il mio destino... Giulio, oggi ho sentito una frase, ' I matematici parlano con Dio, i fisici con i matematici, gli altri parlano fra loro', beh dopotutto non ha proprio torto ... grazie per avermi 'insegnato' (almeno ci hai provato) a giocare a Go e grazie per la tua amicizia. Chi manca?... Paolo,Mangia e Ravio, grazie anche a voi di tutto.

Breve giro degli altri collegiali ... Grazie ai miei 'vecchi' fagioli: Torre, Charlie e Bollo (Torre e Charlie vi prego non deviate le matricole al vostro umorismo surreale). Grazie a quelli che sono ormai ex ma che mi hanno insegnato tanto come persone: Pedo, Dianzio, il Conte e Balduz. Grazie alle 'vecchie' matricole, Baso, Italo, Deanto, Tobia, Dogui, Remmy,... per le interminabili partite a 'Trono di Spade' e per avermi consentito di compiere imprese, come le osterie narrano, altrimenti impossibili... Grazie alle nuove matricole, per aver creduto nello spirito del collegio.

Ovviamente non posso dimenticarmi delle mie amiche papere, anche se loro snobbano i miei cineforum, sono sempre pronte e disponibili a sollevarmi il morale o a far due chiacchiere. Prima il trio (l'ho promesso) : Chiara-Chichisus, Ilaria-Armony e Laura, vi ringrazio di cuore, trovare persone come voi è praticamente impossibile, ma ci sono riuscito e non vi lascio scappare ... Claudia, Serena, Daniela, Nadia, Francesca, Valentina ... grazie. Mi sto dimenticando di qualcuno ... Betta, per te un ringraziamento speciale: Grazie!!! Un'amica tanto preziosa merita un simile trattamento (non lo faccio solo per gli appunti) .

Beh, adesso devo ringraziare qualcuno che ha sempre partecipato ai miei cineforum oltre che alle bizzarre cene (vedi libanese) organizzate dalla mia follia, parlo delle nuovine : Elisabetta, Serena, Stefania, Lia, Mariagrazia e Patty. Per la Francesa la mia gratitudine non avrà mai fine, non solo spesso mi dà coraggio, ma ieri abbiamo vinto una pizza a calcino!

Un ringraziamento va ai miei compagni corso, Repi, Laura, Chiara,Sgrigno, Erika, Sonia, Marco, Sabrina, Anita,... Un 'grazie' speciale per Gloria e per la Fra (grazie per le conversazioni produttive all'una di notte).Come non ricordare gli amici di sempre Claudia, Lara, Marta, Gloria, Bazon, Alessandro...

Un pensiero va alla Coop di Oleggio, dove negli ultimi tre anni ho passato i fine-settimana, ringrazio la capo negozio Gisella, tutte e tutti i colleghi Nunzia ,Maura, Graziella, Patrizia Rasi e Buzzoni, Antonietta, Pamela, Barbara, Mariangela, Antonella, Fabrizio, Pino, Massimiliano,...

Dopo aver concluso questo mirabile e smisurato elenco, d'altronde se lo scrive il Giova uno se lo può anche aspettare ... devo ringraziare una 'cosa'. Di solito viene ringraziato il Computer, ma io non posso farlo, dato che mi ha abbandonato a metà lavoro, mi rimane quindi solo da ringraziare la mia Macchinetta del Caffè, non solo per il buon caffè, ma anche per i bei momenti che dopo ogni pasto mi regala in compagnia di tutte quelle 'belle' persone di cui prima ho parlato. Grazie.