Zweite Klausur zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2009

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. D. Vogel
Michael Maier

Lösung

Aufgabe 1.

a) Falsch: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ x \mapsto x \cdot e_1$ ist injektiv, da $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$. Aber f ist nicht surjektiv, da $e_2 \notin \mathrm{Bild}(f)$.

b) Falsch: Für $n = 2$ und $K = \mathbb{Q}$ gilt

$$\det(E_{11} + E_{22}) = \det(E_2) = 1 \neq 0 = 0 + 0 = \det(E_{11}) + \det(E_{22})$$

c) Wahr: Hat ϕ den Eigenwert c, so gibt es ein $v \in V \setminus \{0\}$, so dass $\phi(v) = c \cdot v$. Wäre $c = 0$, so wäre $v \in \mathrm{Kern}(\phi) \neq \{0\}$ und damit ϕ nicht bijektiv. Dann gilt $\phi^{-1}(c \cdot v) = \phi^{-1}(\phi(v)) = \mathrm{id}(v) = v = c^{-1} \cdot (c \cdot v)$ und damit ist $c \cdot v \in V \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert c^{-1} von ϕ^{-1}.

d) Wahr: Sind die Zeilen einer $m \times n$ Matrix A linear unabhängig, dann ist die Dimension des von den Zeilen aufgespannten Untervektorraumes gerade m. Da dies gerade der Rang ist, hat das Bild also Dimension m und die Abbildung ist also surjektiv.

Aufgabe 2.

a) Wir wissen, dass $(\mathrm{GL}(2, K), \cdot)$ eine Gruppe ist. Weiter gilt $U \subset \mathrm{GL}(2, K) = \{A \in M(2 \times 2, K) \mid \det(A) \neq 0\}$ und wir können also das Untergruppenkriterium nutzen:
$E_2 \in U \neq \varnothing$, da $\det(E_2) = 1$.
Sei $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} d & 0 \\ e & f \end{pmatrix} \in U$, dann gilt

$$AB' = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & 0 \\ e & f \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \underbrace{\frac{1}{df}}_{=\det(B)^{-1}=1} \begin{pmatrix} f & 0 \\ -e & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} af & 0 \\ bf - ce & cd \end{pmatrix}$$

wieder eine untere Dreiecksmatrix!
Außerdem gilt $\det(AB^{-1}) = \det(A) \det(B)^{-1} = 1$ und damit dann $AB \in U$. Damit ist U eine Untergruppe von $(\mathrm{GL}(2, K), \cdot)$ und damit $(U, \cdot)$ eine Gruppe.

Statt das Untergruppenkriterium zu verwenden ist es natürlich auch möglich die Assoziativität zu begründen und zu zeigen, dass die Einheitsmatrix in U liegt und das neutrale Element ist. Ähnlich wie oben ergibt sich dann die Abgeschlossenheit (d.h. die Wohldefiniertheit der Verknüpfung) und das die Inversen wieder in U liegen.

b) In diesem Fall gilt $\mathbb{F}_2^\times = \{1\}$ und damit ist $U = \left\{ E_2, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Mit der Einheitsmatrix kommutiert jede Matrix, ebenso, wie jede Matrix mit sich selbst. Da dies bereits alle Fälle abdeckt, handelt es sich also in diesem Fall um eine kommutative Gruppe.

Aufgabe 3.

a) Da $\phi \neq 0$ gibt es ein $v \in V$ mit $\phi(v) \neq 0(v) = 0$. Da das Bild ein Untervektorraum von K ist, folgt daraus: $1 \geq \dim(\text{Bild}(\phi)) \geq \dim(K) = 1$. Also ist $\text{Bild}(\phi) = K$ und es handelt sich um eine surjektive Abbildung. Aus der Dimensionsformel ergibt sich dann

$$\dim(\text{Kern}(\phi)) = \dim(V) - \dim(\text{Bild}(\phi)) = n - 1$$

(für ψ analog).

b) (ϕ, ψ) l.a. $\Leftrightarrow \exists a, b \in K : \; 0 = a\phi + b\psi$ und $(a, b) \neq (0, 0)$
$\overset{\phi,\psi\neq 0}{\Leftrightarrow} \exists a, b \in K^\times : \; -a\phi = b\psi \Leftrightarrow \exists c \in K^\times : \; c\phi = \psi$

Aus (ϕ, ψ) l.a. ergibt sich damit:

$$\forall v \in \text{Kern}(\phi) : \psi(v) = c\phi(v) = c \cdot 0 = 0 \Rightarrow v \in \text{Kern}(\psi)$$

und

$$\forall w \in \text{Kern}(\psi) : \phi(v) = c^{-1}\psi(v) = c^{-1} \cdot 0 = 0 \Rightarrow v \in \text{Kern}(\phi)$$
$$\Rightarrow \text{Kern}(\phi) = \text{Kern}(\psi)$$

Gilt $\text{Kern}(\phi) = \text{Kern}(\psi)$, so können wir von diesem Untervektorraum eine Basis $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ wählen. Diese lässt sich durch einen beliebigen Vektor $v_n \in V \setminus \text{Kern}(\phi)$ zu einer Basis von V ergänzen.
Dann gilt $\phi(v_n), \psi(v_n) \in K^\times$ und wir definieren $c := \frac{\psi(v_n)}{\phi(v_n)} \in K^\times$.
Für $v = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i v_i \in V$ beliebig gilt:

$$\psi(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i \psi(v_i) = a_n \psi(v_n) = a_n c\phi(v_n) = c \sum_{i=1}^{n} a_i \phi(v_i) = c\phi(v)$$

Daraus folgt $\psi = c\phi$ und damit an obiger Überlegung (ϕ, ψ) l.a..

Aufgabe 4.

Benutzen wir z.B. den Algorithmus aus der Lösung zur Aufgabe 46:
1. Bilde aus $u_1, u_2, u_3, w_1, w_2, w_3, w_4$ eine Matrix $A \in M(4 \times 7, \mathbb{R})$, indem die Vektoren in die Spalten geschrieben werden.

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

2. Bestimme durch den Gauß-Algorithmus eine Basis $(v_1', \ldots, v_o')$ von $\text{Lös}(A, 0)$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -3 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -1 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{SZSF}$$

Daraus ergibt sich eine Basis von $\text{Lös}(A, 0)$ wie folgt: $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

3. Von jedem dieser Vektoren v_i' nimm die ersten 3 Komponenten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und bilde so $v_i := \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j u_j$.

$$\left(-2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, -3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, -5\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$\left(\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=:v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}}_{=:v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} -6 \\ -7 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}}_{=:v_3}\right)$$

4. Aus dem Erzeugendensystem $(v_1, \ldots, v_o)$ von $U \cap W$ erzeugt man eine Basis von $U \cap W$.
Man sieht direkt, dass $v_1 + v_2 = v_3$ und dass (v_1, v_2) l.u. sind. Also ist (v_1, v_2) eine Basis und $U \cap W$.

Aus dem Gaußalgorithmus sieht man zusätzlich, dass das Erzeugendensystem von U sogar schon eine Basis ist, also gilt $\dim U = 3$. Außerdem sind die ersten vier Spalten von A l.u., die Summe $U + W$ ist also vierdimensional.
Die Dimensionsformel liefert dann $\dim U + \dim W = \dim(U + W) + \dim(U \cap W)$, woraus sich $\dim W = 3$ ergibt.

Aufgabe 5.

a) Wählen wir eine Basis $(u_1, \ldots, u_i)$ von U und $(w_1, \ldots, w_j)$ von W. Wegen $U \cap W = \{0\}$ ist dann $(u_1, \ldots, u_i, w_1, \ldots, w_j)$ l.u. und wegen $U + W = V$ ein Erzeugendensystem von V (d.h. also eine Basis von V und $i + j = n$). Definieren wir $\pi(u_1) = u_1, \ldots, \pi(u_i) = u_i, \pi(w_1) = \ldots = \pi(w_j) = 0$, so ergibt sich eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung π daraus. Diese hat Bild$(\pi)=$ Lin$(\pi(u_1), \ldots, \pi(u_i), \pi(w_1), \ldots, \pi(w_j))=$ Lin$(u_1, \ldots, u_i, 0, \ldots, 0)=U$ und Kern$(\pi) = W$, da $(u_1, \ldots, u_i)$ l.u. ist. Da π und π^2 die Basis $(u_1, \ldots, u_i, w_1, \ldots, w_j)$ gleich abbilden und beide Abbildungen linear sind folgt $\pi = \pi^2$. Das zeigt die Existenz.

Ist andersrum τ ein weiterer Projektor mit der gegebenen Eigenschaft und $u_1, \ldots, u_i, w_1, \ldots, w_j$ wie eben. Dann gilt $u_1, \ldots, u_j \in$ Bild(τ) und damit gibt es $v_1, \ldots, v_i \in V$ mit $\tau(v_1) = u_1, \ldots, \tau(v_i) = u_i$. Daraus folgt $\tau(u_1) = \tau^2(v_1) \overset{\text{Proj.}}{=} \tau(v_1) = u_1$ ($u_2, \ldots$ analog). Also stimmt τ auf der Basis $(u_1, \ldots, u_i, w_1, \ldots, w_j)$ mit dem oben konstruierten π überein und ist somit eindeutig.

b) Es gilt $\dim U = 2, \dim W = 1$ und es bleibt also aus Dimensionsgründen zu zeigen, dass $U \cap W = \{0\}$. Dies bestimmen wir über den Gaußalgorithmus (mitsamt der Inversen, die wir später in der c) brauchen werden).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Der Lösungsraum ist trivial, also die drei Vektoren l.u. und damit die Summe von U und V direkt.

c) Aus b) wissen wir, dass $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) =: \mathcal{B}$ eine Basis von $\mathbb{Q}^3$ ist.

Das gesuchte π hat bezüglich dieser die folgende einfache Gestalt:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann erhalten wir dessen Darstellung bzgl. $(e_1, e_2, e_3) =: \mathcal{S}$ durch Basiswechsel:

$$M_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}}(\pi) = T_{\mathcal{S}}^{\mathcal{B}} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\pi) \underbrace{T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{S}}}_{=(T_{\mathcal{S}}^{\mathcal{B}})^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 & -1 \\ -14 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$