Zweite Klausur zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2009

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. D. Vogel
Michael Maier

13.3.10, 10.00-12.00 Uhr

Erst zu Beginn der Prüfung öffnen!

Dauer: 2 Stunden

Hilfsmittel: ein handbeschriebenes A4-Blatt (d.h. insbesondere keine Kopien!) Geben Sie dieses mit der Klausur ab.

Punkte: Aus den 5 Aufgaben ergibt sich die Gesamtpunktzahl als Summe der 4 besten Punktezahlen. Die schlechteste Aufgabe wird also gestrichen.

Bestehen: Zum Bestehen der Klausur sind 8 Punkte hinreichend.

Bearbeitung: Verwenden Sie für jede Aufgabe ein gesondertes Blatt und beschriften Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Name	Matrikelnr.

Nr.	1	2	3	4	5	$\sum$
Punkte						
Kürzel						

Viel Erfolg!

Name: ______________ Mat.Nr.: ______________

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Sei K ein Körper. Beweisen oder widerlegen Sie (mit Begründung!):

a) Jede injektive lineare Abbildung ist surjektiv.

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung $\det : M(n \times n, K) \longrightarrow K$ eine K-lineare Abbildung.

c) Sei V ein K-Vektorraum, $\phi \in \mathrm{End}(V)$ bijektiv und besitze den Eigenwert $c \in K$. Dann ist $c \neq 0$ und die Umkehrabbildung ϕ^{-1} hat den Eigenwert c^{-1}.

d) Sind die Zeilen einer Matrix $A \in M(m \times n, K)$ linear unabhängig, so ist die zugehörige Abbildung $\tilde{A} : K^n \longrightarrow K^m,\ x \mapsto Ax$ surjektiv.

Name: ______________ Mat.Nr.: ______________

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und $U := \left\{ A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \;\middle|\; \det(A) = 1 \right\} \subset M(2 \times 2, K)$.

a) Zeigen Sie, dass $(U, \cdot)$ eine Gruppe ist.

b) Ist diese Gruppe für $K = \mathbb{F}_2$ abelsch?

Name: ____________ Mat.Nr.: ____________

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K. Wir betrachten $\phi, \psi \in \mathrm{Hom}(V, K)$ mit $\phi, \psi \neq 0$ als Elemente des K-Vektorraumes der linearen Abbildungen von V nach K. Zeigen Sie:

a) $\dim(\mathrm{Kern}(\phi)) = \dim(\mathrm{Kern}(\psi)) = n - 1$

b) ϕ, ψ sind genau dann linear abhängig, wenn $\mathrm{Kern}(\phi) = \mathrm{Kern}(\psi)$ ist.

Name: ______________ Mat.Nr.: ______________

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Gegeben seien die folgenden zwei reellen Untervektorräume des $\mathbb{R}^4$:

$$U := \text{Lin}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right),\ W := \text{Lin}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\-6\\-1\\-4\end{pmatrix}\right)$$

a) Bestimmen Sie eine Basis von $U \cap W$.

b) Was ist die Dimension von $U + W$, U und W?

Name: ______________ Mat.Nr.: ______________

Aufgabe 5. (4 Punkte)

Wir betrachten den $\mathbb{Q}$-Vektorraum $V = \mathbb{Q}^3$.

a) Zeigen Sie: Sind U, W Untervektorräume von V mit $U \oplus W = V$, dann gibt es einen eindeutig bestimmten Projektor $\pi : V \longrightarrow V$ mit $\mathrm{Bild}(\pi) = U$ und $\mathrm{Kern}(\pi) = W$.

   Hinweis: *Ein Projektor* $\pi : V \longrightarrow V$ *ist eine* K*-lineare Abbildung, für die* $\pi \circ \pi = \pi$ *gilt.*

b) Beweisen Sie, dass $U := \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix})$ und $W := \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix})$ zueinander komplementär sind, d.h. $V = U \oplus W$.

c) Bestimmen Sie für U und W aus Teil b) die Darstellungsmatrix $M^{(e_1,e_2,e_3)}_{(e_1,e_2,e_3)}(\pi)$ des Projektors π mit $\mathrm{Bild}(\pi) = U$ und $\mathrm{Kern}(\pi) = W$.