Geometrische Überlegungen zu Castel del Monte

von Susanne Krömker

Friedrich II (∗ 1194, † 1250) ließ in der Nähe von Bari im Süden Italiens das Castel del Monte errichten, ein ungewöhnliches Staufer Kastell, dessen Geometrie auf dem gleichseitigen Achteck basiert.
Die wichtigen Winkel können aus der Kreisteilung durch acht $360° : 8 = 45°$ und vom gleichschenkligen Dreieck abgeleitet werden, das gerade ein Achtel des Oktogons ausmacht $(180° - 45°)/2 = 67.5°$.
Die Windrose, das sogenannte 3-Oktogramm, erhält man aus der Verlängerung aller Kanten des Achtecks, bis diese auf die Geraden treffen, die von den übernächsten Kanten gebildet werden. In jeder Spitze werrden nun kleine Windrosen konstruiert, die einander gerade berühren. Ihre inneren Achtecke bestimmen den Grundriß der Ecktürme (*geometrische Konfiguration mit innerer Ästhetik*, siehe [K]).

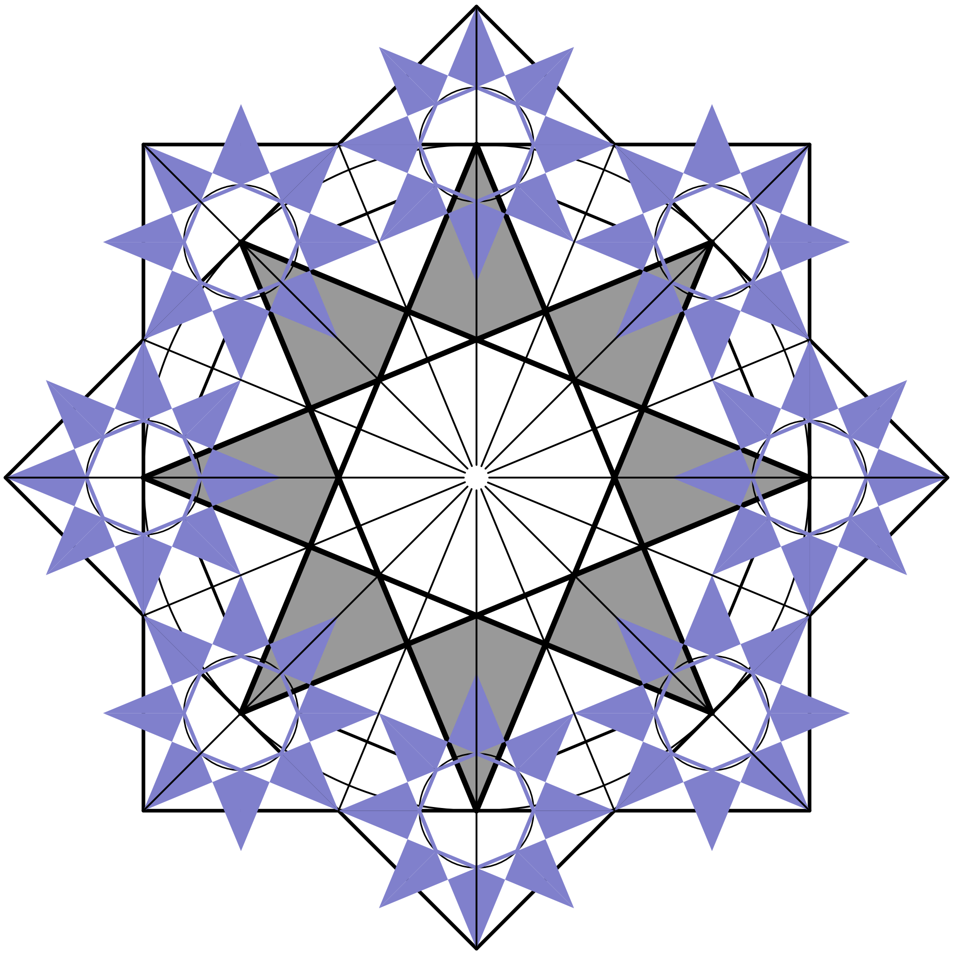

Abbildung 1: Konstruktionsprinzip.

Der Quotient aus dem Radius des Umkreises der Windrose und des Umkreises des Achtecks wird von der Winkelfunktion Tangens bestimmt (siehe Abbildung 2).

$$a_0 : a_1 = \tan 67.5^\circ = \sqrt{2} + 1 \approx 2.41421 \qquad \left(\frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67.5^\circ\right)$$

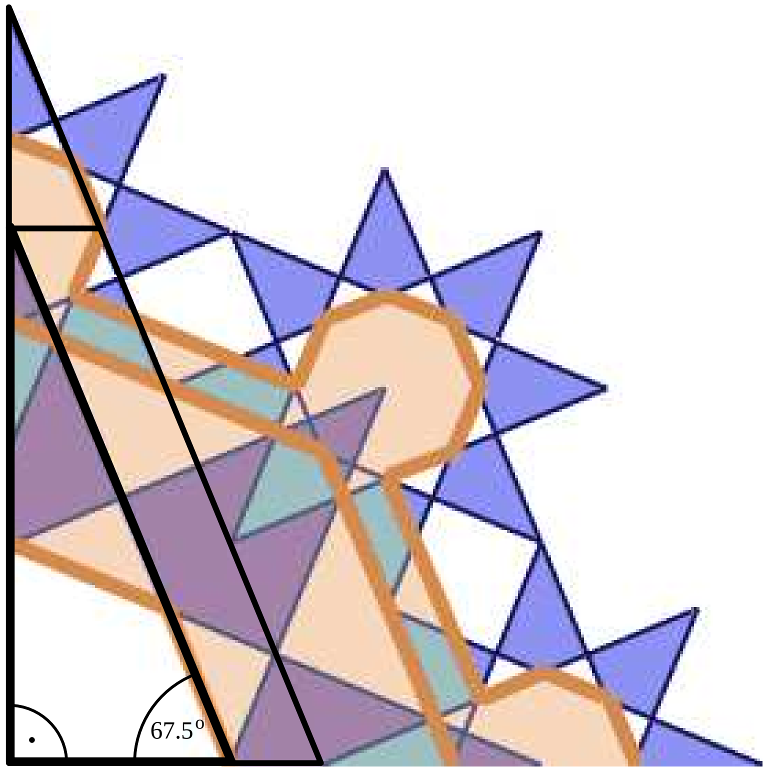

Abbildung 2: Das markierte Dreieck enthält die wichtigen Längen für die Proportionen des Gebäudes. Der $\tan 67.5^\circ (= a_0 : a_1 =$ Gegenkathete : Ankathete) bildet genau dieses Verhältnis ab. Durch Strahlensätze wird es auf alle a_i übertragen.

Setzt man das Konstruktionsprinzip über die Windrosen nach außen bis ins Unendliche fort, erhält man ein Fraktal aus Achtecken. Daraus erhält man die folgenden Größen.

Proportionen			Abstände
a_0	$=$	$\sqrt{2}+1$	vom Gebäudemittelpunkt bis zum Mittelpunkt eines Turms
a_1	$=$	1	vom Mittelpunkt des Innenhofs zu einer seiner Ecken (Einheit)
a_2	$=$	$\sqrt{2}-1$	vom Mittelpunkt eines Turms zu einer seiner Ecken
$\ldots$			
a_n	$=$	$\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$	vom Mittelpunkt des n-ten Turms zu einer seiner Ecken

Nimmt man die Formel für a_n so erhält man über Induktion für den n-ten Turmradius $a_n = a_0 \left(\frac{1}{a_0^n}\right)$. Auf dem Strahl vom Gebäudemittelpunkt durch eine Spitze der Windrose liegen die a_i aneinandergereiht. Da diese Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, stellt sie den Konvergenzradius des Konstruktionsprinzips dar (siehe Abbildung 3).

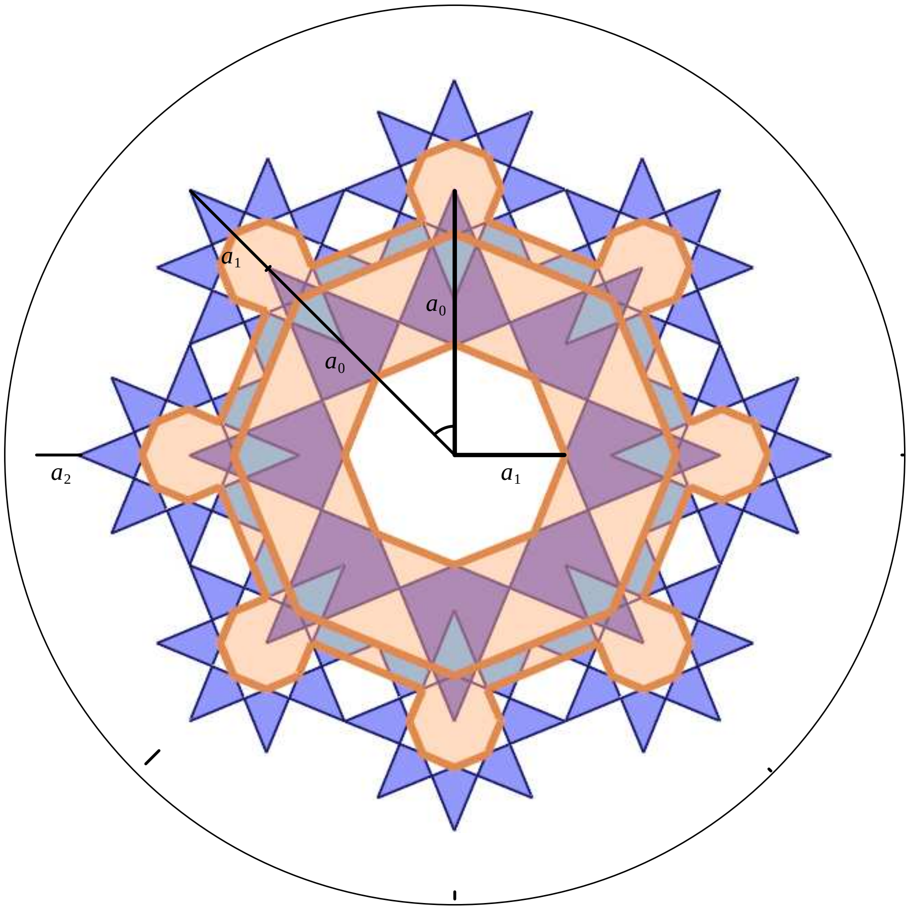

Abbildung 3: Grundriß mit den Größen a_0, a_1 und a_2. Der äußere Kreis wird vom Konvergenzradius bestimmt.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a_0^k} = a_0 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{a_0}} \right) = \frac{a_0^2}{a_0 - 1} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{\sqrt{2}} = 2 + \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 4.12132$$

Als Einheit $a_1 = 1$ gilt der Abstand vom Mittelpunkt des Innenhofs zu einer seiner Ecken. Also findet die spielerische Fortsetzung des Bauprinzips ihre maximale Ausdehnung im 4.12132fachen Maß der Einheit.

Nach H. Götze ([G], S. 164) beträgt $a_0 = 23.70$ m. Daraus berechnet sich das Maß für die Einheit $a_1 = 9.8169$ m.
Für die Höhe des Bauwerks wird in der Computerdarstellung zweimal die Einheit a_1 eingesetzt. Dadurch ist jeder Turm so hoch wie sein Abstand seines innersten Punktes zum Gebäudemittelpunkt (siehe Abbildung 4).

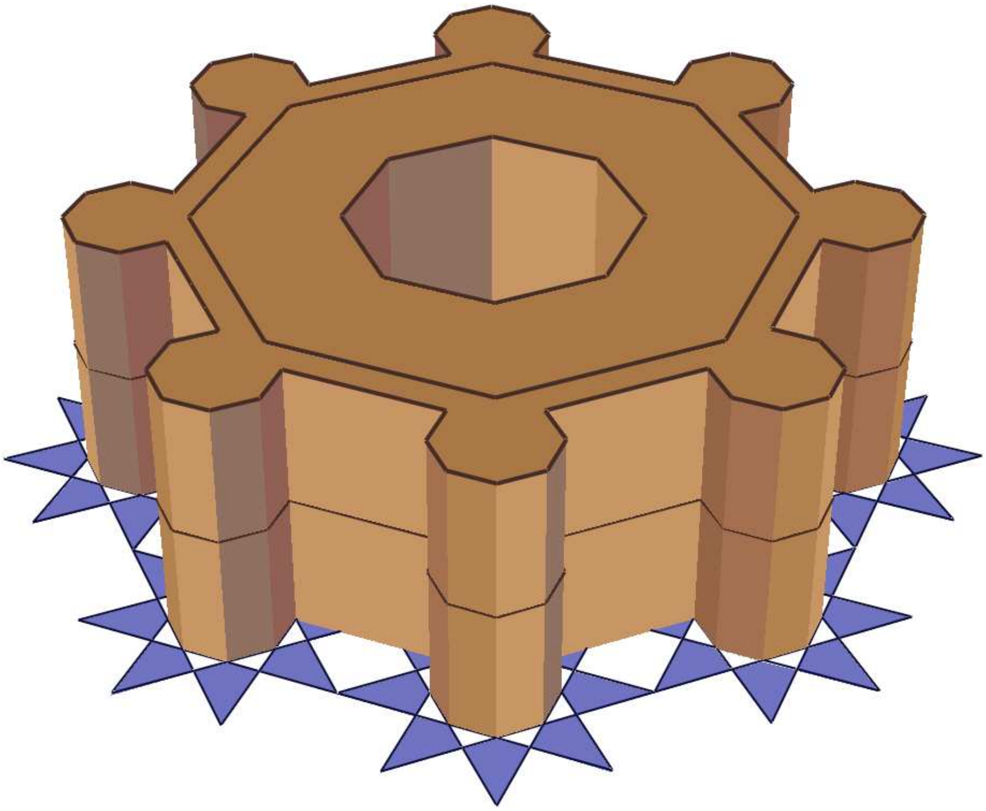

Abbildung 4: Grundriß mit Bauprinzip und perspektivische Darstellung des Castel mit einer Höhe von zweifacher Einheit a_1.

Literatur

[G] H. Götze,
Castel del Monte, Gestalt und Symbol der Architektur Friedrichs II.
3. Auflage, Prestel, München 1991

[K] M. Koecher,
Castel del Monte und das Oktogon, Miscellanea mathematica, Springer, Heidelberg 1991