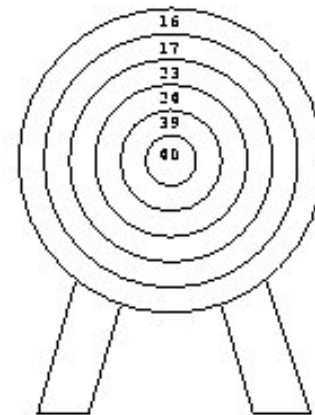


# Mathe–Star Lösungen Runde 1 2003/2004

## Klasse 5-7

### Aufgabe:

Auf der Kerwe ist eine Zielscheibe aufgestellt, auf die man mit Dartspeilen werfen kann. Den Hauptgewinn, einen grossen Plüschelefanten, darf man nur mitnehmen, wenn man genau 100 Punkte erzielt. Wieviele Pfeile braucht man mindestens, um in der Summe aller Punkte genau 100 zu erreichen?



### Lösung:

Um die volle Punktzahl bei dieser Aufgabe zu erhalten, musste man zwei Teile bearbeiten. Zum einen war die Angabe der (eindeutigen) richtigen Lösung gefragt. Zum anderen musste man aber auch zeigen, dass eine Lösung mit weniger Pfeilen nicht möglich war, denn die Aufgabe fragt explizit danach, wie viele Pfeile man *mindestens* braucht. Eine vollständige Lösung muss also insbesondere auch begründen, warum die angegebene Kombination diejenige mit den wenigsten Pfeilen ist!

Für den ersten Teil muss man nur lange genug mit den Zahlen jonglieren, um eine Lösung zu finden: Es existiert eine Lösung mit 6 Pfeilen. 16, 16, 17, 17, 17, 17 ist, wie man leicht nachrechnet, eine Lösung, die alle Anforderungen erfüllt.

Die Minimalität dieser Lösung zu zeigen, ist ungleich schwieriger. Warum kann es keine Lösung mit weniger Pfeilen geben? Es sei  $P$  die Menge der Punktzahlen, die mit einem Pfeil erreichbar sind,  $P = \{16, 17, 23, 24, 39, 40\}$ . Hierzu gibt es (mindestens) zwei Lösungsvarianten:

1. Man kann bei der Lösung alle kombinatorischen Varianten durchrechnen. Um dies effektiv zu tun, betrachtet man alle Summen, die man mit zwei Pfeilen erreichen kann. Diese sind:  $S = \{32, 33, 34, 39, 40, 41, 55, 56, 57, 62, 63, 64, 78, 79, 80\}$ . Nun kann man die Frage nach Lösungen mit 1,2,3,4 oder 5 Pfeilen systematisch beantworten:
  - Mit einem oder zwei Pfeilen kann man höchstens 40 bzw. 80 Punkte erreichen.
  - Mit drei oder vier Pfeilen kann es auch nicht gehen, denn wenn man jede Zahl in  $S$  von 100 abzieht, erhält man  $T = \{68, 67, 66, 61, 60, 59, 45, 44, 43, 22, 21, 20\}$  und keine dieser Zahlen lässt sich mit einem Pfeil erreichen (denn  $T \cap P = \emptyset$ ) und auch mit zwei Pfeilen kann man keine der erforderlichen Restsummen in  $T$  erzielen, denn  $T \cap S = \emptyset$ .

- Die Frage, ob es mit fünf Pfeilen geht, ist am schwierigsten zu beantworten. Dazu muss man alle Differenzen zwischen einer Zahl aus  $T$  (Was ist nach zwei Pfeilen noch an Punkten zu erzielen?) und Zahlen aus  $S$  (Was erreiche ich mit den Pfeilen 3 und 4?) bilden. Wenn dabei eine Zahl herauskommt, die man mit einem Pfeil erzielen kann, so hat man eine Lösung. Die sich ergebenden Differenzen fassen wir in der Menge  $U$  zusammen:  $U = \{36, 35, 34, 33, 32, 29, 28, 27, 26, 25, 13, 12, 11, 10, 9, 6, 5, 4, 3, 2, 22, 21, 20, 19, 18\}$ . Man sieht also, daß es auch mit fünf Pfeilen keine Lösung geben kann (weil  $U \cap P = 0$  ist).
2. Eine andere Sichtweise der Fragestellung findet man, wenn man die Zielzahlen in der Gruppen einteilt:  $K = \{16, 16 + 1\}$ ,  $M = \{23, 23 + 1\}$  und  $G = \{39, 39 + 1\}$  (klein, mittel und gross). Nun kann man folgendermassen argumentieren:
- Bei einem Pfeil kann man die Grundzahlen  $Z_1 = \{16, 23, 39\}$  erreichen (je nach dem, ob man ein Ziel der Kategorie  $K$ ,  $M$  oder  $G$  trifft) und dieses Ergebnis noch um 1 grösser gestalten. Damit erreicht man 100 sicher nicht.
  - Bei zwei Pfeilen sind die Kombinationen  $KK$ ,  $KM$ ,  $KG$ ,  $MM$ ,  $MG$  und  $GG$  möglich, die auf Zielzahlen  $Z_2 = \{32, 39, 55, 46, 62, 78\}$  führen und keine dieser Zahlen ist um höchstens 2 kleiner als 100.
  - Bei drei Pfeilen kann man schon berücksichtigen, daß die Kombinationen  $MGG$  und  $GGG$  schon als Grundzahl zu groß ist. Man erhält als mögliche Grundkombinationen  $KKK$ ,  $KKM$ ,  $KKG$ ,  $KMM$ ,  $KMG$ ,  $KGG$ ,  $MMM$  und  $MMG$  mit zugehörigen Grundsummen  $Z_3 = \{48, 55, 71, 62, 78, 94, 69, 85\}$ , von denen keine höchstens 3 kleiner ist als 100.
  - Bei vier Pfeilen sind alle Kombinationen mit  $GG$  sowie auch  $KMMG$  und  $MMMMG$  zu groß. Es bleiben  $KKKK$ ,  $KKKM$ ,  $KKKG$ ,  $KKMM$ ,  $KKMG$ ,  $KMMM$  und  $MMMM$  mit den zugehörigen Grundsummen  $Z_4 = \{64, 71, 87, 78, 94, 85, 92\}$  und keine dieser Grundsummen ist höchstens 4 kleiner als 100.
  - Bei fünf Pfeilen schliesslich muß man mindestens dreimal kleine Zahlen auswählen (denn  $KKMMM$  hat schon eine Grundsumme von 101) und darf zudem kein  $G$  mehr wählen (denn  $KKKKG$  hat auch schon die Grundsumme 103). Es bleiben also nur  $KKKKK$ ,  $KKKKM$ ,  $KKKKMM$  und  $KKMMM$  mit den Grundsummen  $Z_5 = \{80, 87, 94\}$  und von diesen Zahlen ist keine höchstens 5 kleiner als 100.
  - Bei sechs Pfeilen ist schon  $KKKKKM$  zu gross. Zulässig ist also nur  $KKKKKK$  mit einer Grundzahl von 96. Da wir die Grundzahl um maximal 6 (wegen der sechs Pfeile) vergrößern können, kann man mit  $KKKKKK$  die 100 erreichen. Man muss dazu mit vier der sechs Pfeile die grössere der beiden K-Zahlen treffen: 16, 16, 17, 17, 17, 17 ist die einzige Lösung!

Um abschließend nochmals klarzumachen, warum die Betrachtung der Grundsummen ausreicht, wählen wir ein Beispiel aus der Suche nach einer Lösung mit 4 Pfeilen. Das Muster  $KMMG$  hat die Grundsumme 81. Diese erhält man, wenn man aus jeder Gruppe jeweils das kleinere Element wählt:  $16 + 23 + 23 + 39 = 81$ . Durch Vergrößern jeweils einer Zahl innerhalb der drei Mengen kann man nun die Gesamtsumme um 1, 2, 3 oder 4 ( $\rightarrow$  4 Pfeile!!) erhöhen. Beispielsweise:

- $16 + 23 + 23 + 39 = 81$
- $17 + 23 + 23 + 39 = 82$
- $17 + 24 + 23 + 39 = 83$
- $17 + 24 + 24 + 39 = 84$
- $17 + 24 + 24 + 40 = 85$

Weil aber die Grundsumme 81 um mehr als vier kleiner als 100 ist, kann man 100 nicht als Kombination  $KMMG$  erreichen.

## Klasse 8-10

Aufgabe:

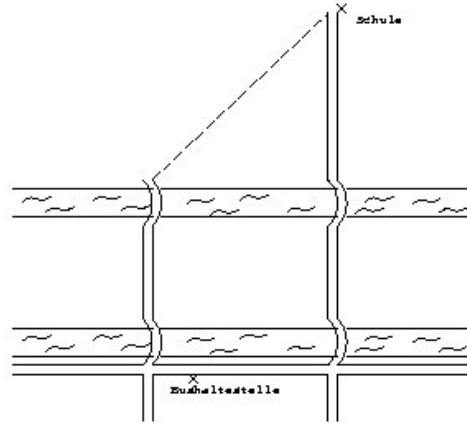
Piet und Jan sind zum Schüleraustausch in Amsterdam. Jeden Morgen fahren sie mit dem Bus bis zu Haltestelle Prinsengracht und gehen den restlichen Weg zur Schule zu Fuss.

Heute veranstalten Sie dabei ein Wettrennen:

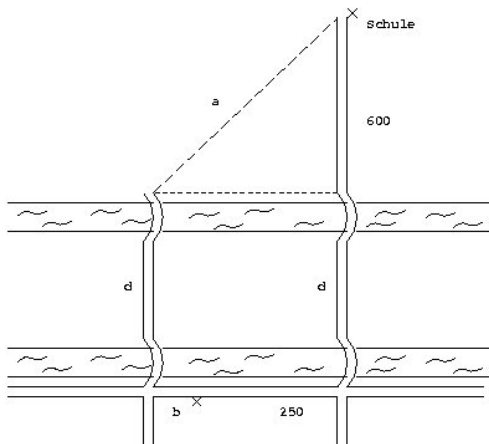
Piet läuft an der Prinsengracht entlang 250m nach Osten, biegt dann auf den Kolvendam ein, überquert die Prinsen- und die Arvensgracht und läuft dann weitere 600m nach Norden bis zur Schule.

Jan dagegen rennt zum näher gelegenen Hoitmansdam, überquert auch die beiden Grachten und läuft dann über die Wiese direkt auf die Schule zu.

Da beide gleich schnell rennen können, kommen sie auch genau zur gleichen Zeit an der Schule an. Wie weit sind die beiden Brücken an der Prinsengracht voneinander entfernt?



Lösung:



Führt man die nebenstehenden Benennungen ein, so ergibt sich aus der Aufgabe folgendes System von Gleichungen:

$$\begin{aligned}a + d + b &= 250 + d + 600 \\a^2 &= (b + 250)^2 + 600^2\end{aligned}$$

Die erste Zeile drückt aus, dass die beiden Laufwege gleich lang sind (da die beiden gleich schnell laufen und gemeinsam ankommen), die zweite Gleichung ist der Satz des Pythagoras, angewendet auf das obere Dreieck. Nach Vereinfachen erhält man:

$$\begin{aligned}a &= 850 - b \\a^2 &= (b + 250)^2 + 600^2\end{aligned}$$

und somit

$$(850 - b)^2 = (b + 250)^2 + 600^2$$

was auf

$$850^2 - 1700b + b^2 = b^2 + 500b + 250^2 + 600^2$$

und dann auf

$$\begin{aligned}850^2 - 600^2 - 250^2 &= 2200b \\ \frac{300000}{22000} &= b\end{aligned}$$

führt. Es ist also  $b = 136, \overline{36}$  und die Entfernung zwischen den beiden Brücken damit  $386, \overline{36}$  Meter.

## Klasse 11-13

*Aufgabe:*

Der Einkäufer eines Elektrogrossmarktes kauft einen Restposten mit Computern und Waschmaschinen. Für die Computer bezahlt er dabei 344 Euro/Stück, für die Waschmaschinen 265 Euro/Stück.

Wenn er für die Computer insgesamt 33 Euro mehr bezahlt hat, als für die Waschmaschinen und wenn er insgesamt nicht mehr als 800 Geräte gekauft hat, wieviele Computer und Waschmaschinen hat er dann erworben.

*Lösung:*

Diese Aufgabe führt auf eine auf den ersten Blick recht einfache Gleichung. Gesucht sind natürliche Zahlen  $a, b \in \mathbb{N}$  mit  $a * 344 - b * 265 = 33$ . Leider kann man solche „Linearen diophantischen Gleichungen“ nicht wie gewöhnliche lineare Gleichungen ausrechnen, denn die Bedingung, dass die Lösung ganzzahlig sein soll, widerspricht den meisten traditionellen Lösungsansätzen.

Aus der Zahlentheorie bekannt ist aber die Tatsache, dass sich der  $ggT$  zweier Zahlen als Linearkombination dieser Zahlen schreiben lässt. Zudem liefert der *Euklidische Algorithmus* hierzu ein Verfahren. Bei den linearen diophantischen Gleichungen geht man nun so vor:

1. Man bestimmt den  $ggT$  der beiden auftretenden Zahlen. Hier gilt:  $ggT(265, 344) = 1$ : die beiden Zahlen sind teilerfremd. Auf eine Lösung kann man übrigens nur hoffen, wenn die rechte Seite (hier: 33) durch den berechneten  $ggT$  teilbar ist, was hier gerade gilt!
2. Danach bestimmt man eine Linearkombination, die den  $ggT$  darstellt:

$$\begin{aligned} 344 - 265 &= 79 \\ 265 - 3 * 79 &= 28 \\ 79 - 2 * 28 &= 23 \\ 28 - 23 &= 5 \\ 23 - 4 * 5 &= 3 \\ 5 - 3 &= 2 \\ 3 - 2 &= 1 \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} 1 &= 3 - 2 \\ &= 3 - (5 - 3) \\ &= 2 * 3 - 5 \\ &= 2 * (23 - 4 * 5) - 5 \\ &= 2 * 23 - 9 * 5 \\ &= 2 * 23 - 9 * (28 - 23) \\ &= 11 * 23 - 9 * 28 \\ &= \dots \\ &= 104 * 344 - 135 * 265 \end{aligned}$$

Die letzte Zeile zeigt, wie man eine Differenz von einem Euro zwischen dem Kaufpreis für Computer und für Waschmaschinen erzielt: Man kauft 104 Computer und 135 Waschmaschinen.

3. Wenn man diese Lösung mit 33 multipliziert, erhält man eine erste Kombination, die eine Preisdifferenz von 33 ergibt:  $33 * 104 = 3432$  Computer und  $135 * 33 = 4455$  Waschmaschinen haben eine Preisdifferenz von 33 Euro.

Diese Lösung widerspricht allerdings der Vorgabe von maximal 800 Geräten. Aber man kann 265 Computer und 344 Waschmaschinen weglassen, ohne dass sich an der Preisdifferenz etwas ändert, denn  $344 * 265 - 265 * 344 = 0$ ! Neben (3432/4455) erhält man als weitere Lösungen also (3167/4111), (2902/3767), ..., (517/671), (252/327) und diese letzte Lösung erfüllt (als einzige) auch noch die Bedingung, daß die Gesamtanzahl der Geräte höchstens 800 beträgt:  $252 * 344 - 327 * 265 = 33$ .

Der Händler kaufte also 252 Computer und 327 Waschmaschinen.