Dr. Michael J. Winckler
Mathe–Star–Initiative
IWR, Raum 502, INF 368, 69120 Heidelberg
Michael.Winckler@iwr.uni-heidelberg.de
http://www.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/Mathe-Star/

Mathe–Star Lösungen Runde 1 2004/05

Allgemeine Lösungeshinweise

Die folgenden Tipps fassen einige Punkte zusammen, die zur *vollständigen und fehlerfreien* Beantwortung von Aufgaben beachtet werden sollten.

1. Enger Bezug zum Aufgabentext

   Im Rahmen der Bearbeitung der Frage sollten nur aus den in der Aufgabe explizit genannten Hinweisen Schlüsse gezogen werden. Die Einbeziehung weiterer Annahmen in die Aufgabe ist nur insoweit gerechtfertigt, als sie sich zweifelsfrei aus den allgemeinen Bemerkungen zur Aufgabenstellung ergeben.

   Beispielsweise kann von einem *Ball* in einer Aufgabenstellung angenommen werden, dass es sich um eine perfekte Kugel handelt. Vermessungsaufgaben in freier Natur können (falls nicht explizit anders angegeben) in der Ebene (d.h. unter Vernachlässigung der Erdkrümmung) berechnet werden. Von einem *5-Liter-Gefäß* kann man aber *nicht* annehmen, dass es eine Messskala besitzt oder dass man es verwenden kann, um andere Masseinheiten als 5 Liter abzumessen.

2. Vollständigkeit der Antwort und logisches Ableiten

   Zu den in der Aufgabenstellung aufgestellten Behauptungen und Fragen muss in der Lösung Stellung bezogen werden. Aus einem Antwortsatz oder einer anderen geeigneten schriftlichen Darlegung muss klar zum Ausdruck kommen, wie die richtige Lösung zum gestellten Problem aussieht.

   Zu dieser Antwort sollte im Rahmen der Ausarbeitung der Lösung eine logische Ableitung verfasst werden. Dabei sind alle wesentlichen Gedankenschritte von der Aufgabenstellung bis zur Lösung darzustellen.

   Kann aus der Angabe der Lösung unmittelbar deren Richtigkeit festgestellt werden (z.B. bei einem Sudoku), so ist es hilfreich, eine Bemerkung zur *Eindeutigkeit* der gegebenen Lösung zuzufügen. Die Frage, ob es zu einem Problem mehrere Lösungen gibt, ist in der Mathematik von fundamentaler Bedeutung für die Bewertung einer angegebenen bzw. gefundenen Lösung.

3. Lesbarkeit und Darstellung

   Die Lösung einer Aufgabe soll es einem neutralen Beobachter ermöglichen, die Richtigkeit des Schlusses nachzuvollziehen und dabei die verwendeten Hilfsmittel kennenzulernen. In diesem Sinne ist eine Darstellung der Lösung vorzuziehen, die prägnant und übersichtlich die Lösungsidee darstellt.

   Zeichnungen oder Diagramme können ein Hilfsmittel zur Verdeutlichung eines Lösungswegs sein. Dabei ist aber meist ein ergänzender Kommentar notwendig, um die Lösungsidee verständlich zu machen.

   Bei handschriftlichen Lösungen ist zudem eine klare und lesbare Schrift notwendig. Symbole und Kurzschriften sollten erläutert werden, wenn es sich nicht um mathematische Standard(-Schul)-Notation handelt.

Klasse 5-7

Professor Knobel hat zwei kleine Sanduhren, die 3 min. bzw. 7 min. lang laufen. Der neue Zeittakt seiner Telefongesellschaft beträgt aber 8 Minuten d.h. nach 8, 16, 24, ... Minuten wird die nächste Gebühreneinheit fällig.

Kannst du Professor Knobel weiterhelfen und dir eine Methode ausdenken, wie er mit den beiden Uhren 8, 16, 24, ... Minuten abmessen kann? Die beiden Uhren haben keine Unterteilungen, um einzelne Minuten abzumessen, aber Professor Knobel kann sie während des Telefonierens problemlos umdrehen und z.B. auch beide gleichzeitig laufen lassen.

Hinweis: Die Zeit für das Umdrehen der Sanduhren kann unberücksichtigt bleiben.

Lösung:

1. Man lässt die 7-Minuten-Sanduhr und die 3-Minuten-Sanduhr gleichzeitig loslaufen.
2. Sobald die 3-Minuten-Sanduhr zu Ende gelaufen ist, dreht man sie wieder um.
3. Wenn die 3-Minuten-Sanduhr das zweite Mal durchgelaufen ist, sind 6 Minuten um und in der 7-Minuten-Sanduhr ist noch Sand für eine Minute.
4. Diese Minute lässt man durchlaufen und gleichzeitig dreht man die 3-Minuten-Sanduhr erneut um.
5. Ist die letzte Minute in der 7-Minuten-Sanduhr abgelaufen, so ist auch in der 3-Minuten-Sanduhr eine (von 3) Minuten abgelaufen. Zu diesem Zeitpunkt sind insgesamt 7 Minuten um.
6. Die eine Minute in der 3-Minuten-Sanduhr lässt man nun zurück laufen, dann ist in beiden Sanduhren der ganze Sand unten. Jetzt sind exakt 8 Minuten um.
7. Für den nächsten 8-Minuten-Abschnitt muss man den gleichen Vorgang wiederholen.

Klasse 8-10

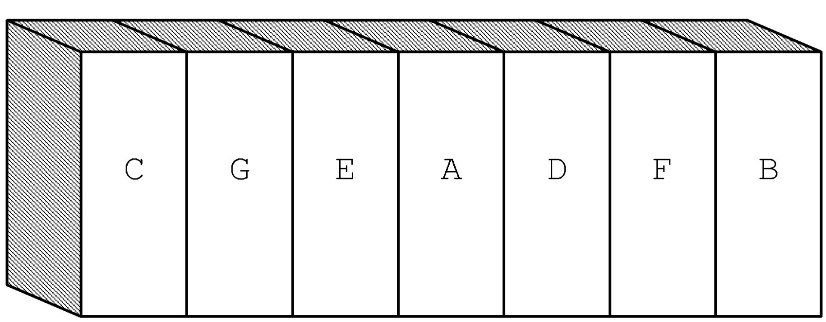
Professor Knobel liest in diesem Semester die Vorlesung *Tiefgreifende Erkenntnisse der Mathematik* und hat dazu sieben Bücher aus der Bibliothek ausgeliehen:

Archimedes und Algebra (A), *Binäre Bäume* (B), *Culture in Chaos and Cubes* (C), *Der Duale Darstellungsraum* (D), *Erwartungswerte Elementarer Ereignisse* (E), *Fermat's Final Findings* (F), und *Gödels Gravitationssatz* (G).

Unter der Woche nimmt er öfter eines dieser Bücher zur Hand, um seine Vorlesung vorzubereiten und stellt es dann achtlos ins Regal zurück. Freitags stehen die sieben Bücher dann meist ungeordnet im Regal.

Um die Bücher wieder zu ordnen, hat sich Professor Knobel eine besondere Methode ausgedacht: Er nimmt drei *nebeneinanderstehende* Bücher gemeinsam und stellt sie in unveränderter Reihenfolge an eine andere Stelle wieder ins Regal zurück. Diesen Vorgang wiederholt er solange, bis die Bücher in alphabetischer Reihenfolge geordnet sind: ABCDEFG.

Unten siehst du, wie die Bücher diesen Freitag angeordnet sind. Kannst du herausfinden, wie Professor Knobel mit nur drei seiner „Tauschoperationen" die Bücher wieder ordnen kann?



Lösung:

Ausgangsposition:

C G E A D F B

Nach dem ersten Umstellen:

A D C G **E F B**

Nach dem zweiten Umstellen:

A D **E F B** C G

Nach dem dritten Umstellen:

A B C D E F G

Klasse 11-13

Professor Knobel verbringt seinem Urlaub im Scheichtum Numeristan. Der Scheich von Numeristan, ein alter Bekannter von Professor Knobel, ist mit der Verteilung des Geldes in Numeristan unzufrieden. Gemeinsam mit Professor Knobel entwirft er einen Umverteilungsplan:

Bei diesem Plan teilen diebeiden die 50.000 Bürger des kleinen Reiches nach ihrem Besitz in 5 Klassen ein. Zu Klasse 1 gehören die 10.000 ärmsten Bewohner, die 10.000 etwas reicheren Bürger bilden Klasse 2 und so fort bis zu den 10.000 Reichsten, die in Klasse 5 zusammengefasst werden. In einem Gesetz soll nun festgelegt werden, dass zunächst die Bürger der Klassen 1 und 2 ihr Geld zusammenbringen und so aufteilen, das alle danach gleich viel Geld besitzen. Danach kommen die Bürger aus Klasse 2 und 3 zusammen und machen das gleiche. Das geht immer so weiter, bis am Schluss die Bürger der Klassen 4 und 5 ihren Geldbesitz gemeinsam neu aufteilen.

Der weise Grosswesir von Numeristan ist mit dem Plan einverstanden, schlägt aber vor, die ganze Umverteilungsaktion bei den beiden reichsten Klassen zu beginnen und gewissermassen „rückwärts" vorzugehen: zuerst die Klassen 4 und 5, danach 3 und 4, gefolgt von 2 und 3 und schliesslich 1 und 2.

Welche der beiden Methoden ist für die ärmsten Bürger vorteilhafter? Und welche Methode würden die Bürger der reichsten Klasse bevorzugen?

Lösung:

Die ärmsten Bürger (1. Klasse) haben Besitz A. Die 2. Klasse hat Besitz B, die 3. Klasse C, die 4. Klasse D und die 5. Klasse E.
Nach der **ersten Methode** bekommt die 1. Klasse dann: $\frac{A+B}{2}$.
Die 2. Klasse hat dann: $\frac{\frac{A+B}{2}+C}{2} = \frac{A+B+2C}{4}$.
Die 3. Klasse: $\frac{A+B+2C+4D}{8}$.
Die 4. und 5. Klasse: $\frac{A+B+2C+4D+8E}{16}$.

Nach der **zweiten Methode** bekommt die 5. Klasse dann: $\frac{E+D}{2}$.
Die 4. Klasse hat dann: $\frac{E+D+2C}{4}$.
Die 3. Klasse: $\frac{E+D+2C+4B}{8}$.
Die 2. und 1. Klasse: $\frac{E+D+2C+4B+8A}{16}$.

Betrachtet man für die 1. Klasse die Differenz der beiden Methoden

$$\frac{E+D+2C+4B+8A}{16}-\frac{A+B}{2}=\frac{E+D+2C+4B+8A}{16}-\frac{8A+8B}{16}=\frac{E+D+2C-4B}{16}=\frac{(E-B)+(D-B)+(2C-2B)}{16}>\mathbf{0}$$

so sieht man, dass die zweite Methode für die 1. Klasse vorteilhafter ist.

Für die 5. Klasse sieht man, dass gilt:

$$\frac{E+D}{2}-\frac{A+B+2C+4D+8E}{16}=\frac{(D-A)+(D-B)+(2D-2C)}{16}$$

Dieser Term ist ebenfalls positiv (da $A<B<C<D<E$). Somit ist zweite Methode auch für die 5. Klasse vorteilhafter.