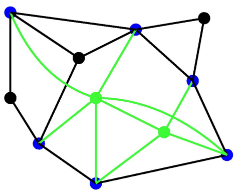

Dr. Michael J. Winckler
Mathe–Star–Initiative
IWR, Raum 502, INF 368, 69120 Heidelberg
Michael.Winckler@iwr.uni-heidelberg.de
http://www.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/Mathe-Star/

Mathe–Star Lösungen Runde 1 2005/06

Allgemeine Lösungeshinweise

Die folgenden Tipps fassen einige Punkte zusammen, die zur *vollständigen und fehlerfreien* Beantwortung von Aufgaben beachtet werden sollten.

1. Enger Bezug zum Aufgabentext

   Im Rahmen der Bearbeitung der Frage sollten nur aus den in der Aufgabe explizit genannten Hinweisen Schlüsse gezogen werden. Die Einbeziehung weiterer Annahmen in die Aufgabe ist nur insoweit gerechtfertigt, als sie sich zweifelsfrei aus den allgemeinen Bemerkungen zur Aufgabenstellung ergeben.

   Beispielsweise kann von einem *Ball* in einer Aufgabenstellung angenommen werden, dass es sich um eine perfekte Kugel handelt. Vermessungsaufgaben in freier Natur können (falls nicht explizit anders angegeben) in der Ebene (d.h. unter Vernachlässigung der Erdkrümmung) berechnet werden. Von einem *5-Liter-Gefäß* kann man aber *nicht* annehmen, dass es eine Messskala besitzt oder dass man es verwenden kann, um andere Masseinheiten als 5 Liter abzumessen.

2. Vollständigkeit der Antwort und logisches Ableiten

   Zu den in der Aufgabenstellung aufgestellten Behauptungen und Fragen muss in der Lösung Stellung bezogen werden. Aus einem Antwortsatz oder einer anderen geeigneten schriftlichen Darlegung muss klar zum Ausdruck kommen, wie die richtige Lösung zum gestellten Problem aussieht.

   Zu dieser Antwort sollte im Rahmen der Ausarbeitung der Lösung eine logische Ableitung verfasst werden. Dabei sind alle wesentlichen Gedankenschritte von der Aufgabenstellung bis zur Lösung darzustellen.

   Kann aus der Angabe der Lösung unmittelbar deren Richtigkeit festgestellt werden (z.B. bei einem Sudoku), so ist es hilfreich, eine Bemerkung zur *Eindeutigkeit* der gegebenen Lösung zuzufügen. Die Frage, ob es zu einem Problem mehrere Lösungen gibt, ist in der Mathematik von fundamentaler Bedeutung für die Bewertung einer angegebenen bzw. gefundenen Lösung.

3. Lesbarkeit und Darstellung

   Die Lösung einer Aufgabe soll es einem neutralen Beobachter ermöglichen, die Richtigkeit des Schlusses nachzuvollziehen und dabei die verwendeten Hilfsmittel kennenzulernen. In diesem Sinne ist eine Darstellung der Lösung vorzuziehen, die prägnant und übersichtlich die Lösungsidee darstellt.

   Zeichnungen oder Diagramme können ein Hilfsmittel zur Verdeutlichung eines Lösungswegs sein. Dabei ist aber meist ein ergänzender Kommentar notwendig, um die Lösungsidee verständlich zu machen.

   Bei handschriftlichen Lösungen ist zudem eine klare und lesbare Schrift notwendig. Symbole und Kurzschriften sollten erläutert werden, wenn es sich nicht um mathematische Standard(-Schul)-Notation handelt.

Klasse 5-7 *Aufgabe*:

In der Schule von Kevin Knobel nehmen vier Schülerinnen (Anke, Berta, Doris und Enja) und zwei Schüler (Carl und Florian) an der Endrunde der Schulschachmeisterschaft teil. Kevin soll das Endrundentunier organisieren, in dem jeder Spieler 1x gegen jeden anderen spielen soll. Die Schule verfügt über drei tunierlegale Schachbretter.

Nun grübelt Kevin schon seit Tagen nach, wie er für die einzelnen Tunierrunden den Spielplan so aufstellen kann, dass er möglichst wenige Runden braucht.

Wieviele Runden müssen mindestens gespielt werden? Stelle einen Spielplan auf (Wer spielt wann gegen wen?) und begründe, warum Kevin nicht mit weniger Runden auskommen kann.

Lösung:

Zunächst muss man sich bewusst machen, dass Schach ein Spiel ist, bei dem gleichzeitig zwei Personen gegeneinander spielen. Da bei diesen Meisterschaften sechs Schüler/-innen auf drei verschiedenen Feldern gegeneinander antreten, ist leicht zu erkennen, dass zum einen mindestens fünf Runden gespielt werden müssen, da jeder der sechs Spieler ja 5 Gegenspieler hat und dass, zumindest in der Theorie, immer alle sechs Spieler gleichzeitig spielen können. Um zu schauen, ob das jedoch in der Praxis tatsächlich aufgeht und sich nicht in einer bestimmten Runde die Spielzeiten für die einzelnen Spieler überschneiden, ist die Aufstellung eines Spielplans von enormer Wichtigkeit.

So könnte man bei der Erstellung vorgehen:

1. Zuerst werden für die Schüler Abkürzungen gefunden, das erleichtert die Planung: A (Anja), B (Bert), C (Carl), D (Doris), E (Enja), F (Florian)

2. Als nächstes wird eine Tabelle mit drei Spalten, stellvertretend für die drei Spielfelder, angelegt. Das könnte so aussehen:

Spielfeld 1	Spielfeld 2	Spielfeld 3
A gegen B	C gegen D	E gegen F
...	...	...

3. Nun trägt man die Spiele für das erste Spielfeld ein. Der Einfachheit halber wird hier immer Anja spielen, und zwar fünf mal hintereinander, denn dann hat sie alle ihre Spiele gegen ihre fünf Gegner absolviert.

4. Was auffällt, wenn man jetzt versucht, die restlichen Spielfelder so zu füllen, dass keiner der Spieler zweimal gegen den gleichen Gegner spielt ist die Tatsache, dass wenn Anja z.B. schon gegen Doris gespielt hat (in ihrem fünften und letztem Spiel), dann muss man später Doris nicht nochmal gegen Anja spielen lassen. Genauso bei den anderen Spielern, weswegen man Florian am Ende nicht mehr gesondert betrachten muss, da alle seine Spiele schon gegen die anderen stattgefunden haben.

5. Insgesamt müssen also: $5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 15$ Spiele stattfinden. Auf drei Felder verteilt hätte man nach 5 Runden 15 Spiele. Und so würde ein fertiger Spielplan aussehen:

Spielfeld 1	Spielfeld 2	Spielfeld 3
A B	C D	E F
A C	B F	D E
A D	B E	C F
A E	D F	B C
A F	B D	C E

Klasse 8-10 *Aufgabe*:

Professor Knobel bildet Buchstabenketten aus den Buchstaben A und B. Die dabei enstehenden "Worte" wie ABAABABBAB und ABBBAA verändert er Schritt für Schritt nach einer eigenen Regel: Wenn das Wort die Buchstabenkombination AB erhält, kann er diese durch BA ersetzen (aber nicht umgekehrt!!) und erhält so wieder ein Wort.

Manchmal kann Knobel so eine lange Kette von Worten bilden, wobei er von Wort zu Wort jeweils eine Ersetzung durchführt. Dabei grübelt er über folgende Frage nach: Ist es möglich, ein solches Wort mit 20 Buchstaben aus A und B zu bilden, mit dem man durch geschicktes Ersetzen eine *unendlich lange Folge von Worten* bilden kann? Diese müssen nicht alle verschieden sein!

Die Antwort ist selbstverständlich zu begründen bzw. zu beweisen!!

Lösung:

Bei dieser Aufgabe ist es zunächst besonders wichtig, Professor Knobels Vorgehensweise beim Ändern der Wörter zu verinnerlichen. Da es immer nur die Richtung von AB nach BA und nicht umgekehrt gibt, wird es immer nur möglich sein, ein B zu ändern, wenn davor ein A steht.

Um diese Aufgabe erfolgreich zu lösen, könnte man wie folgt vorgehen:

1. Zuerst gestaltet man dieses zwanzigstellige Wort, das gefunden werden soll, etwas anschaulicher.
2. Eine Möglichkeit, dies zu bewerkstelligen, wäre die Buchstaben AB durch Zahlen zu ersetzen, da man leichter mit Zahlen als Buchstaben arbeiten bzw. rechnen kann.
3. AB wird von uns von nun durch 12 ersetzt (A=1 und B=2).
4. Nun hat man kein zwanzigstelliges Wort mehr sondern eine zwanzigstellige Zahl, die gefunden werden soll. Das bedeutet, dass bei einem Wechsel von 12 zu 21 (statt AB zu BA) die uspründliche Zahl größer wird. Hierzu ein kleines Beispiel:

Alte Zahl	Neue Zahl	Differenz
12	21	9
1122	1212	90
1212	2112	900
11221212	12121212	900000

5. Dies macht deutlich, dass unsere zwanzigstellige Zahl immer größer und niemals kleiner wird. Allerdings kann eine nur zwanzigstellige Zahl niemals unendlich groß werden. Die größtmögliche Zahl, die mit 1 und 2 darstellbar ist, ist eine Zahl bestehend aus zwanzig 2en. Aber selbst diese wird mit der vorgegebenen Umtauschmöglichkeit niemals erreicht!

Da es also nicht möglich ist, eine unendliche große Zahl zu erzeugen, ist es auch nicht möglich, eine unendlich lange Folge von Worten AB zu erzeugen, da auch hier, je nachdem wie das Ursprungswort gewählt ist, früher oder später ein Ende erreicht wird. Sobald hier nämlich ein B am Anfang steht, kann dieses nicht mehr geändert werden, genauso wie jedes B, das direkt auf das B an erster Stelle oder eine Kette von B beginnend bei der ersten Stelle folgt.

Klasse 11-13 *Aufgabe*

Sina Knobel macht Urlaub in der Karibik. Auf der Insel Tihuahua wird sie auf ein Eingeborenenfest eingeladen. Die Zeremonien zwischen den drei auf der Insel lebenden Stämmen der Djenas, Eroies und Siloijas sind komplex und verwirrend. Mittlerweile gehören einige Bewohner der Insel durch Heirat und Adoption mehr als einem Stamm an. Folgende Informationen bekommt Sina während des Festes durch Gespräche heraus:

- Alle Djenas sind Eroies.
- Ein Drittel aller Eroies sind Djenas.
- Die Hälfte aller Siloijas sind Eroies.
- Genau ein Siloija ist auch Djena.
- Genau acht Siloijas sind Eroies.
- Es gibt noch 90 Eroies.

Wieviele Eroies sind weder Djenas noch Siloijas? Und wieviele Einwohner leben noch auf der Insel?

Lösung:

Zur Lösung dieser Aufgabe muss man versuchen, die Angaben, die man erhalten hat, etwas zu strukturieren.

1. Zuallererst ist wichtig, dass alle Djenas auch Eroies sind. Das heißt, egal wieviele Djenas es gibt, diese gehören automatisch zum Stamm der Eroies.
2. Dann gibt es eine indirekte Angabe über die Zahl der Djenas, denn genau ein Drittel alle Eroies sind Djenas. Das heißt also, wenn man die Zahl der Eroies durch drei teilt, erhält man die Zahl der Djenas.
3. Da die Zahl der Eroies explizit angegeben ist, kann man ausrechnen, wieviele Djenas es gibt: $90/3=\underline{30}$.
4. Der dritte Stamm, der auf der Insel Tihuahua lebt, ist der Stamm der Siloijas. Auch hier sind einige Angaben gemacht. So weiß man, dass genau die Hälfte aller Siloijas auch Eroies sind. Es ist aber zudem angegeben, dass genau 8 Siloijas auch Eroies sind. Das heißt also, dass es doppelt soviele Siloijas geben muss wie 8, also $\underline{16}$ insgesamt.
5. Einer der Siloijas ist zugleich Djena. Da aber jeder Djena auch zu den Eroies gehört, gehört auch dieser zum Stamm der Eroies. Da genau 8 Siloijas zu den Eroies gehören, zählt dazu auch dieser Siloija. Das heisst, dass die übrigen 8 Siloijas reine Siloijas sind.

Nun sollte man die verarbeiteten Informationen erst einmal zusammenfassen.

- Es gibt 30 Djenas.
- Es gibt 16 Silojias.
- Es gibt 90 Eroies.

Der nächste Schritt wäre nun zu schauen, wieviele Eroies weder Djenas noch Siloijas sind.

1. 30 Eroies sind schonmal Djenas, bleiben noch 60.
2. 8 Siloijas sind auch Eroies, allerdings ist einer davon, wie oben festgestellt, auch Djena, wurde also schon bei den 30 Djenas von den 90 Eroies abgezogen. Bleiben also noch 7 Siloijas, die man von den 60 Eroies abziehen muss.

3. 53 Eroies sind weder Djenas noch Siloijas.

Wenn man nun festellen will, wieviele Bewohner auf der Insel leben, muss man einfach die bereits herausgefundenen Ergebnisse benutzen:

- Es gibt also insgesamt 90 Eroies.
- 30 davon sind zugleich Djenas, wovon einer zugleich Siloija und Eroie ist.
- In der Anzahl der 90 Eroies sind ebenfalls die 7 Siloijas enthalten.
- Zusätzlich zu den 53 reinen Eroies und den 37 gemischten Eroies gibt es noch 8 reine Siloijas.

Somit hat die Insel 98 Einwohner!