Dr. Michael J. Winckler
Mathe–Star–Initiative
IWR, Raum 502, INF 368, 69120 Heidelberg
Michael.Winckler@iwr.uni-heidelberg.de
http://www.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/Mathe-Star/

Mathe–Star Lösungen Runde 1 2006/07

Allgemeine Lösungeshinweise

Die folgenden Tipps fassen einige Punkte zusammen, die zur *vollständigen und fehlerfreien* Beantwortung von Aufgaben beachtet werden sollten.

1. Enger Bezug zum Aufgabentext

   Im Rahmen der Bearbeitung der Frage sollten nur aus den in der Aufgabe explizit genannten Hinweisen Schlüsse gezogen werden. Die Einbeziehung weiterer Annahmen in die Aufgabe ist nur insoweit gerechtfertigt, als sie sich zweifelsfrei aus den allgemeinen Bemerkungen zur Aufgabenstellung ergeben.

   Beispielsweise kann von einem *Ball* in einer Aufgabenstellung angenommen werden, dass es sich um eine perfekte Kugel handelt. Vermessungsaufgaben in freier Natur können (falls nicht explizit anders angegeben) in der Ebene (d.h. unter Vernachlässigung der Erdkrümmung) berechnet werden. Von einem *5-Liter-Gefäß* kann man aber *nicht* annehmen, dass es eine Messskala besitzt oder dass man es verwenden kann, um andere Masseinheiten als 5 Liter abzumessen.

2. Vollständigkeit der Antwort und logisches Ableiten

   Zu den in der Aufgabenstellung aufgestellten Behauptungen und Fragen muss in der Lösung Stellung bezogen werden. Aus einem Antwortsatz oder einer anderen geeigneten schriftlichen Darlegung muss klar zum Ausdruck kommen, wie die richtige Lösung zum gestellten Problem aussieht.

   Zu dieser Antwort sollte im Rahmen der Ausarbeitung der Lösung eine logische Ableitung verfasst werden. Dabei sind alle wesentlichen Gedankenschritte von der Aufgabenstellung bis zur Lösung darzustellen.

   Kann aus der Angabe der Lösung unmittelbar deren Richtigkeit festgestellt werden (z.B. bei einem Sudoku), so ist es hilfreich, eine Bemerkung zur *Eindeutigkeit* der gegebenen Lösung zuzufügen. Die Frage, ob es zu einem Problem mehrere Lösungen gibt, ist in der Mathematik von fundamentaler Bedeutung für die Bewertung einer angegebenen bzw. gefundenen Lösung.

3. Lesbarkeit und Darstellung

   Die Lösung einer Aufgabe soll es einem neutralen Beobachter ermöglichen, die Richtigkeit des Schlusses nachzuvollziehen und dabei die verwendeten Hilfsmittel kennenzulernen. In diesem Sinne ist eine Darstellung der Lösung vorzuziehen, die prägnant und übersichtlich die Lösungsidee darstellt.

   Zeichnungen oder Diagramme können ein Hilfsmittel zur Verdeutlichung eines Lösungswegs sein. Dabei ist aber meist ein ergänzender Kommentar notwendig, um die Lösungsidee verständlich zu machen.

   Bei handschriftlichen Lösungen ist zudem eine klare und lesbare Schrift notwendig. Symbole und Kurzschriften sollten erläutert werden, wenn es sich nicht um mathematische Standard(-Schul)-Notation handelt.

Klasse 5-7

Aufgabe:

Professor Knobel kommt auf seinen Reisen viel in der Welt rum. Im letzten Jahr hat er in ganz Europa Kollegen besucht. Dabei hat er sich in vielen Städten sein Lieblingsgetränk (Apfelsaftschorle) gekauft. Die Preise für ein großes Glas (0.5 Liter) waren dabei recht unterschiedlich.

Zwischen dem billigsten und dem teuersten Preis lagen ganze 2 Euro. Zudem hat Professor Knobel sich folgende Notizen gemacht:

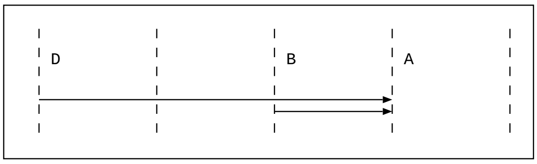
1. In Paris kostete die Schorle 50 Cents weniger, als in Dublin und 1.50 weniger als in London.
2. In Rom kostete sie 50 Cents mehr als in Helsinki, aber 1.50 weniger als in München.
3. In Amsterdam bezahlte Knobel 50 Cents mehr als in Berlin und 1.50 mehr als in Dublin.
4. In Wien ist sie 1.50 teurer als in Rom.
5. In drei Städten kostet sie 4.50, und ist sonst in je zwei Städten gleich teuer.

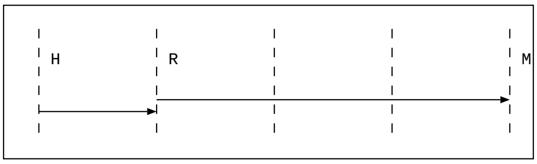
Was kostet die Schorle in welcher Stadt?

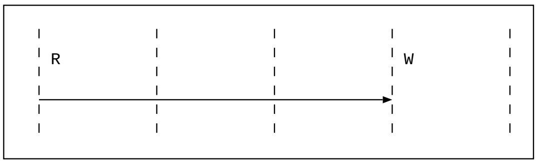
Lösung:

Zunächst ist es hilfreich, sich die getroffenen Preisaussagen 1-4 in einer kleinen Skizze klarzumachen. Ich habe dazu ein Raster von 50 Cents (Abstand zwischen den gestrichelten Linien) gewählt und für jede der 4 Aussagen ein eigenes Kärtchen entworfen.

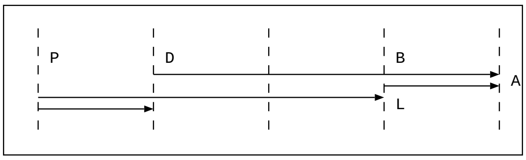
1

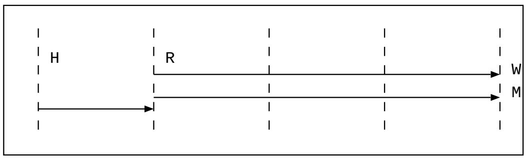

3


2


4


Man kann nun die Karten 1 und 3 sowie 2 und 4 jeweils vereinigen, da die Städte Dublin bzw. Rom auf beiden Karten vorkommen.

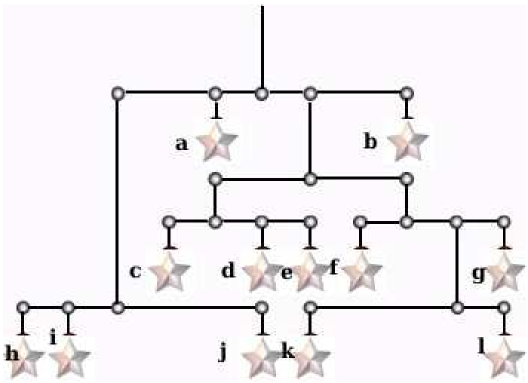
1


2


Nun ist auf jeder Karte der Abstand zwischen billigster und teuerster Stadt 2 Euro. Damit weiss man, wie man die beiden Karten kombinieren muss (nach Aussage 5). Es ergeben sich drei teuerste Städte (Amsterdam, München, Wien), in denen eine Apfelschorle jeweils 4.50 kostet. Die restlichen Preise ergeben sich aus den Karten: Berlin und London 4 Euro, Dublin und Rom 3 Euro und Helsinki und Paris 2.50 Euro.

Klasse 8-10

Aufgabe:



Frau Knobel hat zu Weihnachten wieder das grosse Mobile aus dem Keller geholt. An dieses Mobile sind Sterne mit Gewichten von 10, 20, 30, ... 120g anzuhängen, wie die Skizze das zeigt, wobei alle Stangen im Gleichgewicht sind. Die Stangen selbst sind praktisch gewichtslos. Zu beachten sind allerdings die Längen der Stangen, die den Gewichten verschiedene Hebel geben. Die Hebellängen kann man anhand der rasterartigen Anordnung gut ablesen. So stehen die Hebelarme der Stange rechts unten beispielsweise im Verhältnis 3:1. Welches Gewicht hängt wo?

Lösung:

Um diese Aufgabe korrekt zu bearbeiten, muss man sich zunächst die Hebelverhältnisse klarmachen, die in den jeweiligen teilbäumen wirken:

- Hängen an einem Ast die Gewichte g_1 und g_2 in den Abständen a_1 und a_2 rechts und links vom Aufhängepunkt, so ergeben sich Hebelkräfte $F_1 = g_1 * a_1$ und $F_2 = g_2 * a_2$, die bei Gleichgewicht gleich gross sein müssen.
- Mehrere Gewichte auf einer Seite in unterschiedlichen Abständen führen zu einer Addition der Hebelkräfte.
- Bei der Bestimmung des Gewichts unter einem Aufhängepunkt spielen nur die dort hängenden Einzelgewichte, nicht aber deren Hebelkräfte an niedrigeren Ästen eine Rolle!

Aus dem Gleichgewicht an jedem Ast lässt sich somit jeweils eine Gleichung herleiten, wenn man die Abstände entsprechend interpretiert und für die Gewichte Variablen einführt.

$$
\begin{aligned}
2*h+i &= 3*j & (1)\\
3*k &= l & (2)\\
f &= k+l+2*g & (3)\\
c &= d+2*e & (4)\\
2*(c+d+e) &= 2*(f+g+k+j) & (5)\\
3*(h+i+j)+a &= c+d+e+f+g+k+l+3*b & (6)
\end{aligned}
$$

Wenn man die Gewichte nun in 10g-Einheiten misst, besteht die Aufgabe darin, die ganzen Zahlen 1-12 so auf die Variablen zu verteilen, dass alle Gleichungen erfüllt sind. Bei dem auftretenden Gleichungssystem sprich man von einer ,,Diophantischen Gleichung', weil die Lösung aus natürlichen Zahlen bestehen muss. Diese Eigenschaft macht das Problem i.d.R. schwieriger, da Lösungsmethoden für allgemeine lineare Gleichungen nur eingeschränkt verwendet werden können. Andererseits kann man bei solchen Gleichungen oft mit Teilbarkeitseigenschaften die Menge möglicher Lösungen stark einschränken.

So muss z.B. l ein Vielfaches von 3 sein, damit Gleichung (2) erfüllt ist. Zudem dürfen k (und damit $l = 3*k$) nicht zu gross sein, damit Gleichung (3) noch erfüllbar bleibt. Wäre $k \geq 3$, so ergäbe sich $l \geq 9$ und damit $f \geq 14$, was nicht sein kann. Wir unterscheiden also nur die Fälle $k = 1$ und $k = 2$.

Fall 1: $k = 1$**,** $j = 3$

Nun gilt es, die Elemente f und g passend zu bestimmen. Ist $g = 2$, so ist $f = 8$. Da man in Gleichung (5) die 2 kürzen kann, sind nun die vier Gewichte k, l, f, g mit den drei Gewichten c, d, e zu vergleichen.

Fall 1.1: $k = 1$**,** $j = 3$**,** $g = 2$**,** $f = 8$

Es ergibt sich eine Gewichtssumme von 14. Aber die drei kleinstmöglichen Gewichte ergeben als Summe schon $4 + 5 + 6 = 15$ und somit sind die Gewichte c, d, e nicht belegbar.

Fall 1.2: $k = 1$**,** $j = 3$**,** $g = 4$**,** $f = 12$

Es ergibt sich eine Gewichtssumme von 20. Diese Summe ist auf verschiedene Arten noch kombinierbar. Berücksichtigt man die schon verwendeten Zahlen, so kommen folgende Tripel für c, d, e in Betracht: (2/7/11), (2/8/10), (5/6/9), (5/7/8).

Von diesen Tripeln kann man nur das erste so verteilen, dass auch Gleichung (4) erfüllt wird: $c = 11$, $d = 7$, $e = 2$.

Mit diesen sieben belegten Elementen ergibt Gleichung (6) nun:

$$3 * (h + i + j) + a = 40 + 3 * b. \tag{7}$$

Hier kann man wiederum eine Teilbarkeitsregel verwenden: Da $3 * (h + i + j)$ und $3 * b$ jeweils bei Teilung durch 3 keinen Rest lassen, muss a den gleichen Rest bei Teilung durch 3 haben, wie 40, also 1. Damit kommt nur $a = 10$ in Frage und Gleichung (6) verkürzt sich auf

$$3 * (h + i + j) = 30 + 3 * b. \tag{8}$$

Die übriggebliebenen Ziffern sind: (5/6/8/9). Die Summe dieser vier Zahlen ist 28 und so ergibt sich: $h + i + j = 28 - b$. Setzt man diese Beziehung ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} 3 * (28 - b) &= 30 + 3 * b \\ 84 - 3b &= 30 + 3b \\ 54 &= 6b \\ 9 &= b \end{aligned}$$

Mit $h = 5$, $i = 8$ und $j = 6$ erfüllen die restlichen drei Zahlen auch Gleichung (1). Eine Lösung ist gefunden. Für die Antwort auf die Frage nach der Eindeutigkeit dieser Lösung ist nun noch Fall 2 zu behandeln.

Fall 2: $k = 2$**,** $j = 6$

Mit einer analogen Überlegung wie zu Fall 1 ergibt sich zwingend $g = 1$ und $f = 10$. Die Summe der Elemente c, d, e muss in diesem Fall also 19 betragen.

Aus den wiederum vier möglichen Zahlentripeln (3/4/12), (3/5/11), (3/7/9) und (4/7/8) kann nur eine Kombination Gleichung (4) erfüllen: mit $c = 11$, $d = 7$ und $e = 3$ erhält man $11 = 7 + 2 * 3$.

Ebenfalls analog zu Fall 1.2 schliesst man, dass a den gleichen Rest bei Teilung durch 3 lassen muss, wie 38.

Fall 2.1: $k = 2$**,** $j = 6$**,** $g = 1$**,** $f = 10$**,** $c = 11$**,** $d = 7$**,** $e = 3$**,** $a = 5$

Es bleiben (4/8/10/12) für b,h,i,j. Mit $h + i + j = 34 - b$ Ergibt sich aus Gleichung (6) in diesem Fall

$$\begin{aligned} 3 * (34 - b) &= 30 + 3 * b \\ 102 - 3b &= 33 + 3b \\ 135 &= 6b, \end{aligned}$$

was in ganzen Zahlen nicht lösbar ist.

Fall 2.2: $k = 2$**,** $j = 6$**,** $g = 1$**,** $f = 10$**,** $c = 11$**,** $d = 7$**,** $e = 3$**,** $a = 8$

Es bleiben (4/5/10/12) für b,h,i,j. Mit $h + i + j = 31 - b$ Ergibt sich aus Gleichung (6) in diesem Fall

$$\begin{aligned} 3 * (34 - b) &= 30 + 3 * b \\ 102 - 3b &= 30 + 3b \\ 132 &= 6b, \end{aligned}$$

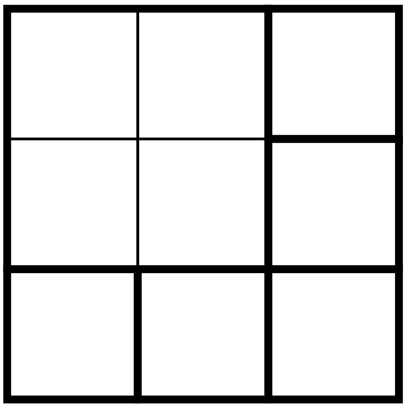
was zu $b = 12$ führt. Die verbleibende Gleichung (1) ist aber mit den drei Zahlen (4/5/10) in keiner Kombination lösbar.

Damit bleibt die in Fall 1.2 gefundene Lösung die einzige für diese Aufgabe.

$\square$

Klasse 11-13

Aufgabe:



Wir zerlegen Quadrate aus $n \times n$ Kästchen in kleinere Teilquadrate (mit ganzzahliger Seitenlänge). Eine solche Aufteilung eines Quadrats nennen wir „gültig".

Für $n \geq 2$ bezeichnen wir mit $Q(n)$ die kleinstmögliche Anzahl von Quadraten in einer gültigen Aufteilung des $n \times n$–Quadrates. Zum Beispiel ist $Q(2) = 4$ und $Q(3) = 6$, wie das Bild auch zeigt.

1. Wie gross ist $Q(2k)$ für $k \in N$? Beweis?
2. Bestimme $Q(7)$ und beweise deine Angabe.

Hinweis: Es ist zu einer angegebenen Lösung natürlich zu zeigen, daß es keine gültige Zerlegung mit weniger Quadraten geben kann!

Lösung:

Bei der Lösung dieser Aufgabe erwies es sich bei den TeilnehmerInnen vor allem als grosse Hürde, zu den gestellten Fragen eindeutige Antworten zu formulieren und *zweifelsfrei* zu beweisen.

a.) Ist die Seitenlänge gerade, so kann man das Quadrat durch halbieren längs jeder der beiden Seiten in 4 Unterquadrate halber Seitenlänge aufteilen. Damit ist klar, dass $Q(2k) \leq 4$ gilt (sic!).

Um sich klar zu machen, dass man kein Quadrat in weniger als 4 Teile zerlegen kann, kann man beispielsweise so vorgehen:

1. Da die Seitenlänge jedes verwendeten Unterquadrats kleiner als die Gesamtseitenlänge sein soll, muss jede der 4 Seiten des $2k \times 2k$-Quadrats von je einer Seite von mindestens 2 verschiedenen Unterquadraten abgedeckt werden. Dies ergibt mindestens $2 * 4 = 8$ Unterqudratseiten.

2. Zudem kann jedes Unterquadrat aufgrund der eben genannten Eigenschaft mit höchstens zwei seiner vier Seiten die Seiten des Hauptquadrats berühren. Um acht Unterquadratseiten auf die Seiten des Hauptquadrats zu bringen, benötigt man mindestens 4 Unterquadrate.

Daher gilt: $Q(n) >= 4$ für alle n. Daher gilt insbesondere: $Q(2k) = 4$.

b.) Bei der *vollständigen* Lösung zu dieser Teilaufgabe muss man entsprechend vorgehen: Zum einen muss man zeigen, dass die behauptete Quadratzahl erzielbar ist. Zum anderen ist zu zeigen, dass eine Zerlegung in weniger Quadrate nicht möglich ist. Am übersichtlichsten ist es wohl, mögliche Lösungen nach dem größten verwendeten Unterquadrat zu sortieren.

Die im folgende zu beweisende Antwort ist: $Q(7) = 9$.

Fall 1: größtes Unterquadrat 1×1

Trivialerweise ist hier nur eine Lösung mit **49 Quadraten** möglich.

Fall 2: größtes Unterquadrat 2×2

Jedes Einzelquadrat hat Flächeninhalt vier oder weniger. Damit sind mindestens 13 Quadrate notwendig, um eine Fläche von 12×12 abzudecken (denn $12 * 4 = 48 < 49$). Diese Aussage ist dabei eine untere Abschätzung auf Basis der Flächeninhalte. Für eine geometrisch mögliche Lösung werden in der tat mehr Quadrate benötigt.

Fall 3: größtes Unterquadrat 3×3

Die auch im folgenden verwendete Idee ist, zu versuchen, den Flächeninhalt 49 des Gesamtquadrats aus möglichts wenigen Quadratzahl-Summanden zu errechnen.

Verwende man nur ein 3×3-Quadrat, so braucht man für die restliche Fläche von 40 Einheiten wenigstens 10 weitere Quadrate und also insgesamt mindestens 11 Quadrate.

Verwendet man zwei 3×3-Quadrat und möglichst viele 2×2-Quadrat (7 verwendete ergeben eine Restflächen von 3) so ergeben sich insgesamt mindestens 12 Quadrate ($2 * 9 + 7 * 4 + 3 * 1 = 49$).

Verwendet man drei 3×3-Quadrat, so ergibt sich die maximal verwendbare 2×2-Quadrat als fünf und es bleibt ein 1×1-Quadrat ($3 * 9 + 5 * 4 + 1 = 49$). Dies sind also mindestens zehn Quadrate.

Bei vier 3×3-Quadrat kann man aber zur weiteren Zerlegung aus geometrischen Gründen nur noch 1×1-Quadrate verwenden und kommt so auf mindestens 17 Unterquadrate.

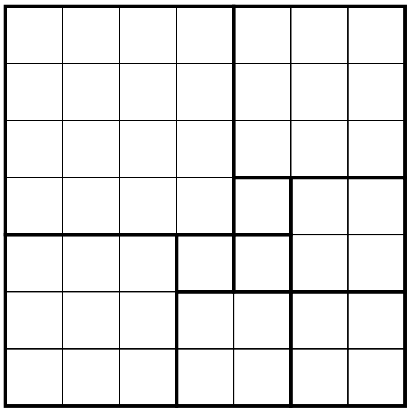
Fall 4: größtes Unterquadrat 4×4

Da dieses und die folgenden Quadrate grösser als die halbe Seitenlänge sind, kann man vom grössten Quadrat jeweils nur eines verwenden. Es ergeben sich folgende besten Kombinationen (je nach verwendetem 3×3-Quadrat:

4er	3er	2er	1er	ges.
1	0	8	1	10
1	1	6	0	8
1	2	3	3	9

Die erste Kombination ist für unsere Aussage unerheblich.

Die zweite Kombination lässt sich nicht umsetzen, den wenn man das 4×4-Quadrat plaziert, bleiben an zwei Seiten ungerade Abstände zum Rand. In der Liste ist aber nur noch ein Quadrat mit ungerader Seitenfläche.



Die dritte Kombination ist in der Tat die minimale. Sie lässt sich auch realisieren, wie man in der Zeichnung sieht.

Fall 5: größtes Unterquadrat 5×5

Damit ist das zweitgrößte höchstens 2×2. Da man nur mit diesen beiden Quadraten die Gesamtfläche nicht abdecken kann, ergeben sich mindestens zehn Unterquadrate ($1 * 25 + 5 * 4 + 4 * 1 = 49$).

Fall 6: größtes Unterquadrat 6×6

Man kann hier nur noch Einheitsquadrate zufügen und erhält insgesamt eine Zerlegung in 14 Unterquadrate.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass Teilquadratkombinationen mit weniger als 9 Quadraten nicht realisierbar sind und es für 9 Unterquadrate eine Lösung gibt.

□