Dr. Michael J. Winckler
Mathe–Star–Initiative
IWR, Raum 502, INF 368, 69120 Heidelberg
Michael.Winckler@iwr.uni-heidelberg.de
http://www.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/Mathe-Star/

Mathe–Star Lösungen Runde 1 2007/08

Allgemeine Lösungeshinweise

Die folgenden Tipps fassen einige Punkte zusammen, die zur *vollständigen und fehlerfreien* Beantwortung von Aufgaben beachtet werden sollten.

1. Enger Bezug zum Aufgabentext

   Im Rahmen der Bearbeitung der Frage sollten nur aus den in der Aufgabe explizit genannten Hinweisen Schlüsse gezogen werden. Die Einbeziehung weiterer Annahmen in die Aufgabe ist nur insoweit gerechtfertigt, als sie sich zweifelsfrei aus den allgemeinen Bemerkungen zur Aufgabenstellung ergeben.

   Beispielsweise kann von einem *Ball* in einer Aufgabenstellung angenommen werden, dass es sich um eine perfekte Kugel handelt. Vermessungsaufgaben in freier Natur können (falls nicht explizit anders angegeben) in der Ebene (d.h. unter Vernachlässigung der Erdkrümmung) berechnet werden. Von einem *5-Liter-Gefäß* kann man aber *nicht* annehmen, dass es eine Messskala besitzt oder dass man es verwenden kann, um andere Masseinheiten als 5 Liter abzumessen.

2. Vollständigkeit der Antwort und logisches Ableiten

   Zu den in der Aufgabenstellung aufgestellten Behauptungen und Fragen muss in der Lösung Stellung bezogen werden. Aus einem Antwortsatz oder einer anderen geeigneten schriftlichen Darlegung muss klar zum Ausdruck kommen, wie die richtige Lösung zum gestellten Problem aussieht.

   Zu dieser Antwort sollte im Rahmen der Ausarbeitung der Lösung eine logische Ableitung verfasst werden. Dabei sind alle wesentlichen Gedankenschritte von der Aufgabenstellung bis zur Lösung darzustellen.

   Kann aus der Angabe der Lösung unmittelbar deren Richtigkeit festgestellt werden (z.B. bei einem Sudoku), so ist es hilfreich, eine Bemerkung zur *Eindeutigkeit* der gegebenen Lösung zuzufügen. Die Frage, ob es zu einem Problem mehrere Lösungen gibt, ist in der Mathematik von fundamentaler Bedeutung für die Bewertung einer angegebenen bzw. gefundenen Lösung.

3. Lesbarkeit und Darstellung

   Die Lösung einer Aufgabe soll es einem neutralen Beobachter ermöglichen, die Richtigkeit des Schlusses nachzuvollziehen und dabei die verwendeten Hilfsmittel kennenzulernen. In diesem Sinne ist eine Darstellung der Lösung vorzuziehen, die prägnant und übersichtlich die Lösungsidee darstellt.

   Zeichnungen oder Diagramme können ein Hilfsmittel zur Verdeutlichung eines Lösungswegs sein. Dabei ist aber meist ein ergänzender Kommentar notwendig, um die Lösungsidee verständlich zu machen.

   Bei handschriftlichen Lösungen ist zudem eine klare und lesbare Schrift notwendig. Symbole und Kurzschriften sollten erläutert werden, wenn es sich nicht um mathematische Standard(-Schul)-Notation handelt.

Klasse 5-7

Aufgabe:

Auf dem Planeten Morulan leben drei Völker:

- Die Uti sagen immer die Wahrheit.
- Die Yomi lügen immer.
- Die Grundi sind etwas schwieriger: Sie sagen manchmal tagelang die Wahrheit und streuen dann doch immer wieder mal eine oder mehrere Lügen ein.

Drei Morulaner, je einer von jedem der drei Völker, geben einem Raumfahrer auskunft über sich und einen ihrer Freunde:

Aken sagt:

- Ich bin kein Uti.
- Doman ist ein Yomi.

Bal sagt:

- Ich bin kein Yomi.
- Doman ist ein Grundi.

Cwos sagt:

- Ich bin kein Grundi.
- Doman ist ein Uti.

Frage

Zu welchem Volk gehört Doman? Und warum?

Lösung:

Man überlegt sich zuerst, zu welchem Volk Aken gehört. Er sagt: "Ich bin kein Uti."
Nimmt man an, er wäre ein Uti, so wäre seine Aussage gelogen. Somit ist er kein Uti, da die Uti immer die Wahrheit sagen.
Geht man davon aus, dass Aken ein Yomi ist, so wäre seine Aussage wahr. Damit widerrum ist er aber auch kein Yomi, da die Yomi immer lügen.
Das heißt, Aken ist ein Grundi, und seine Aussage über Doman hilft uns nicht weiter.

Da wir aber nun wissen, dass Aken ein Grundi ist, so kann Cwos nur entweder ein Uti oder ein Yomi sein. Da seine Aussage "Ich bin kein Grundi" offentsichtlich wahr ist, muss Cwos ein Uti sein. Deshalb ist seine Aussage über Doman wahr und Doman ist ein Uti.

Klasse 8-10

Aufgabe:

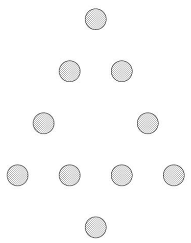


Abbildung 1: Die alte Aufstellung der Bäumchen (von oben gesehen)

Professor Knobel und seine Frau bereiten gemeinsam das Haus auf die Weihnachtszeit vor. Sie schmücken alle Zimmer mit Sternen und Lichtern, stellen Kerzen auf und holen die Keksdosen aus dem Keller.

Professor Knobel hat 10 kleine Weihnachtsbäume gekauft. Für jeden hat er eine Lichterkette, die den Baum schmücken wird. Die zehn Bäume sollen im Garten aufgestellt werden. Aber Frau Knobel hat dazu ihre eigenen Vorstellungen:

"Stell die Bäumchen aber nicht wieder so langweilig auf, wie im letzten Jahr. In Form eines Tannenbaums ... das ist ja total einfallslos."

"Mir hat es immer gut gefallen. Und wir stellen die Bäumchen jedes Jahr so auf. Das hat Tradition!"

"Die Gardners aus der Martinsstrasse haben in diesem Jahr ein ganz tolles Arrangement. Sie haben ihre Plastik-Nikoläuse so im Garten verteilt, dass sie fünf Linien bilden. Und auf jeder Linie stehen vier Nikoläuse."

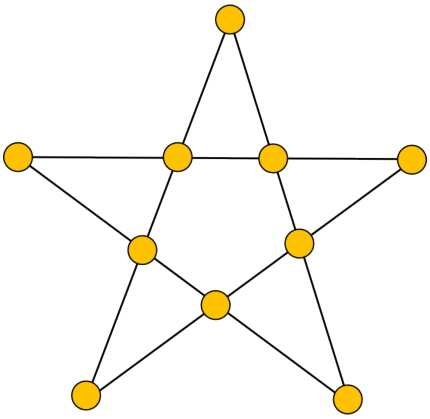
"Die Gardeners haben ja auch viel mehr Nikoläuse, oder? Wir haben nur zehn Weihnachtsbäume. Da wird es gar nicht so einfach, ein schönes Linienmuster zu finden!"

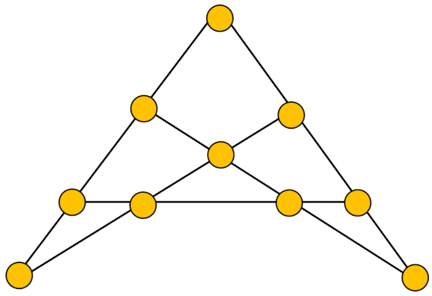
Frage

Kannst du Professor Knobel helfen? Finde eine Anordnung der zehn Weihnachtsbäume auf dem Rasen vor dem Haus der Knobels, dass sie fünf Linien bilden, auf denen jeweils vier Bäumchen stehen!

Lösung:

Mögliche Lösungen wären beispielsweise:





Klasse 11-13

Aufgabe:

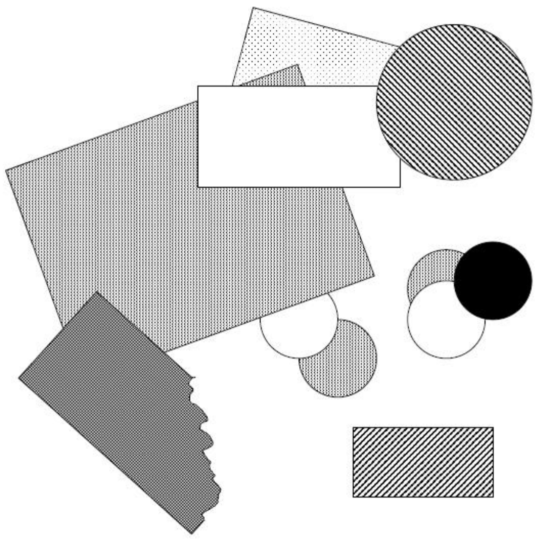


Abbildung 2: Kevins Pappfiguren

Fünf Rechtecke (eines davon mit abgerissener Ecke) und sechs Pappkreise hat Kevin Knobel auf dem Tisch verteilt. Daraus hat er für seine Schwester ein Rätsel zusammengestellt. “Wir betrachten die Ecken aller Rechtecke und die Punkte, an denen sich zwei Ränder (von Rechteck oder Kreis ist egal) schneiden. Kannst du mir drei Gruppen von jeweils vier solchen Punkten suchen, die garantiert auf einem Kreis liegen?”

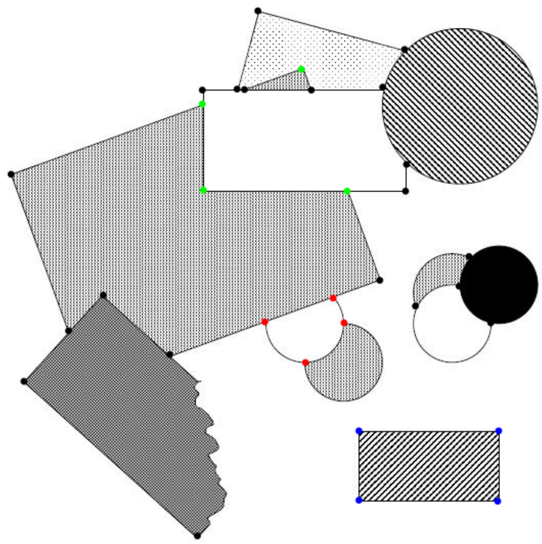
“So, wie die jetzt liegen?”, fragt Sina zurück. “Ja, genau.”, antwortet Kevin:”Du musst mir allerdings jeweils beweisen, dass die vier Punkte einen Kreis bilden!”

Nach einigem Überlegen meint Sina:”Zwei von den Vier-Punkt-Gruppen hab ich schon. Und der Beweis war auch nicht so schwer. Aber die verflixte dritte Punktgruppe kann ich nicht finden!”

Aufgabe

Finde die drei Vierergruppen und begründe jeweils kurz, warum die von dir gewählten Punkte auf einem Kreis liegen!

Lösung:



Zwei der drei Vierergruppen sind leicht zu finden. Die roten Punkte liegen offensichtlich alle auf einem Kreis.

Die blauen Punkte liegen auf einem Kreis, da sie die Eckpunkte eines Rechtecks bilden und somit alle den gleichen Abstand zum Mittelpunkt des Rechtecks haben. Somit liegen sie auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt = Mittelpunkt des Rechtecks.

Zu erkennen, dass die grünen Punkte auch auf einem Kreis liegen, ist etwas schwieriger.

Der Satz des Thales besagt kurz: Alle Winkel am Halbkreisbogen sind rechte Winkel. (*Exakte Formulierung: Konstruiert man ein Dreieck aus den beiden Endpunkten des Durchmessers eines Halbkreises (Thaleskreis) und einem weiteren Punkt dieses Halbkreises, so erhält man immer ein rechtwinkliges Dreieck.*)

Auch die Umkehrung des Satzes ist korrekt: Der Mittelpunkt des Umkreises eines rechtwinkligen Dreiecks liegt immer in der Mitte der Hypotenuse, also der (längsten) Seite des Dreiecks, die dem rechten Winkel gegenüber liegt.

In der Abbildung sieht man zwei solche rechtwinkligen Dreiecke, für die beide dieser Satz gilt und die beide dieselbe Hypotenuse haben. Somit liegen auch diese vier Punkte auf einem Kreis.