Dr. Michael J. Winckler
Mathe–Star–Initiative
IWR, Raum 502, INF 368, 69120 Heidelberg
Michael.Winckler@iwr.uni-heidelberg.de
http://www.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/Mathe-Star/

Mathe–Star Lösungen Runde 1 2008/09

Allgemeine Lösungeshinweise

Die folgenden Tipps fassen einige Punkte zusammen, die zur *vollständigen und fehlerfreien* Beantwortung von Aufgaben beachtet werden sollten.

1. Enger Bezug zum Aufgabentext

   Im Rahmen der Bearbeitung der Frage sollten nur aus den in der Aufgabe explizit genannten Hinweisen Schlüsse gezogen werden. Die Einbeziehung weiterer Annahmen in die Aufgabe ist nur insoweit gerechtfertigt, als sie sich zweifelsfrei aus den allgemeinen Bemerkungen zur Aufgabenstellung ergeben.

   Beispielsweise kann von einem *Ball* in einer Aufgabenstellung angenommen werden, dass es sich um eine perfekte Kugel handelt. Vermessungsaufgaben in freier Natur können (falls nicht explizit anders angegeben) in der Ebene (d.h. unter Vernachlässigung der Erdkrümmung) berechnet werden. Von einem *5-Liter-Gefäß* kann man aber *nicht* annehmen, dass es eine Messskala besitzt oder dass man es verwenden kann, um andere Masseinheiten als 5 Liter abzumessen.

2. Vollständigkeit der Antwort und logisches Ableiten

   Zu den in der Aufgabenstellung aufgestellten Behauptungen und Fragen muss in der Lösung Stellung bezogen werden. Aus einem Antwortsatz oder einer anderen geeigneten schriftlichen Darlegung muss klar zum Ausdruck kommen, wie die richtige Lösung zum gestellten Problem aussieht.

   Zu dieser Antwort sollte im Rahmen der Ausarbeitung der Lösung eine logische Ableitung verfasst werden. Dabei sind alle wesentlichen Gedankenschritte von der Aufgabenstellung bis zur Lösung darzustellen.

   Kann aus der Angabe der Lösung unmittelbar deren Richtigkeit festgestellt werden (z.B. bei einem Sudoku), so ist es hilfreich, eine Bemerkung zur *Eindeutigkeit* der gegebenen Lösung zuzufügen. Die Frage, ob es zu einem Problem mehrere Lösungen gibt, ist in der Mathematik von fundamentaler Bedeutung für die Bewertung einer angegebenen bzw. gefundenen Lösung.

3. Lesbarkeit und Darstellung

   Die Lösung einer Aufgabe soll es einem neutralen Beobachter ermöglichen, die Richtigkeit des Schlusses nachzuvollziehen und dabei die verwendeten Hilfsmittel kennenzulernen. In diesem Sinne ist eine Darstellung der Lösung vorzuziehen, die prägnant und übersichtlich die Lösungsidee darstellt.

   Zeichnungen oder Diagramme können ein Hilfsmittel zur Verdeutlichung eines Lösungswegs sein. Dabei ist aber meist ein ergänzender Kommentar notwendig, um die Lösungsidee verständlich zu machen.

   Bei handschriftlichen Lösungen ist zudem eine klare und lesbare Schrift notwendig. Symbole und Kurzschriften sollten erläutert werden, wenn es sich nicht um mathematische Standard(-Schul)-Notation handelt.

Klasse 5-7

Aufgabe:

Sina Knobel und ihre Freundin Anja Feltens haben einen geheimen Klub gegründet. Zusammen mit sechs Freundinnen treffen sie sich einmal pro Woche in Jugendzentrum und verbringen gemeinsam ihre Zeit: Sie planen Artikel für die Schülerzeitung, besprechen den nächsten Kinobesuch oder quatschen einfach – ungestört von Eltern und Brüdern.

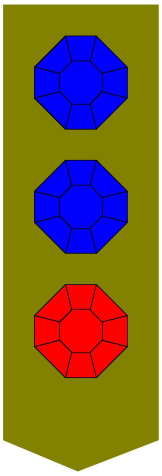


Abbildung 1: Sinas Farbcode

Als Erkennungszeichen hat jede der acht Freundinnen einen Farbcode bekommen, den Sina aus jeweils drei Strass-Steinen zusammengestellt hat. Die Steine sind rot oder blau und jede Freundin hat ihren eignen Drei-Farben-Code auf einem kleinen Lederträger am Gürtel hängen.

Als Erkennungsritual haben die Freundinnen eine größeres Modell des Erkennungszeichens, bei dem man die Stass-Steine auswechseln kann. Sie setzen sich dazu im Kreis. Sina stellt auf dem Modell ihren Code ein (blau-blau-rot). Danach nimmt ein anderes Mädchen das Modell und stellt ihre eigene Farbkombination ein und so fort, bis alle dran waren. Sina beschliesst das kleine Ritual, indem Sie wieder ihren eigenen Code einstellt.

Fragen:

1. Wieviele Mitglieder kann der Klub höchstens haben, wenn jedes Mitglied einen eigenen Farbcode bekommen soll?

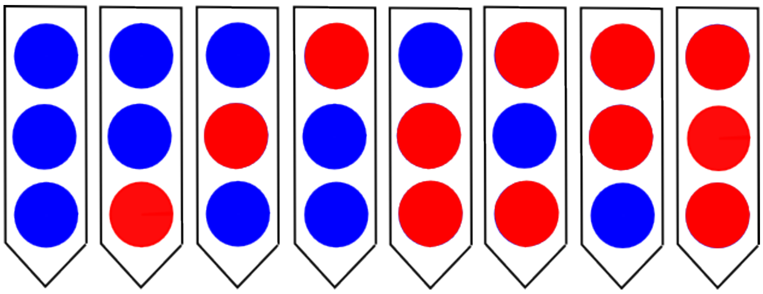
2. Die Mädchen möchten bei dem Ritual jeweils nur **einen** Stein ihrer Vorgängerin ändern, um ihren eigenen Code einzustellen. Kann man die acht Codes so hintereinander anordnen, dass das geht - und das Sina am Schluß wiederum nur einen Stein verändern muss, um ihren Code einzustellen?

Begründe deine Lösung!

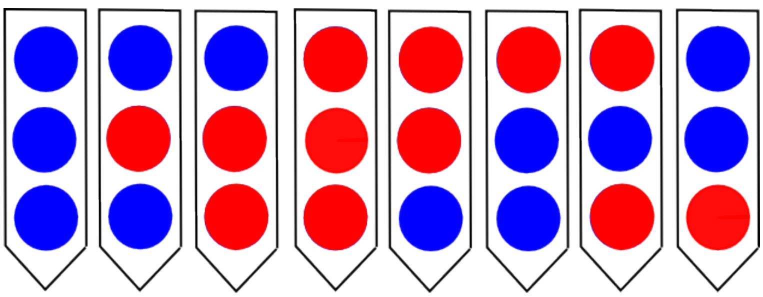
Lösung:

1. Der Klub kann höchstens 8 Mitglieder haben, wenn jedes Mitglied einen eigenen Farbcode bekommen soll. Denn es gibt einen Code, der drei blaue Steine enthält, drei Codes, die zwei blaue Steine einthalten, wieder drei, die nur einen blauen Stein haben, und einen Code, der keinen blauen enthält.

Die Codes sehen wie folgt aus:



2. Ja, man die Codes so hintereinander anordnen, dass jedes Mädchen nur einen Stein verändern muss. Die folgende Reihenfolge stellt eine mögliche Lösung des Problems dar.



Klasse 8-10

Kevin Knobel hilft einem Schäfer beim Schafe hüten, um sich ein wenig Taschengeld zu verdienen. Nach einiger Zeit merkt er, dass der Schäfer irgendwie ganz anders rechnet, als er: Bei jeder Rechnung scheint der Schäfer die Zahlen zuerst in ein *anderes Zahlsystem* umzurechnen - und statt Ziffern verwendet er bei schriftlichen Rechnungen Symbole ...

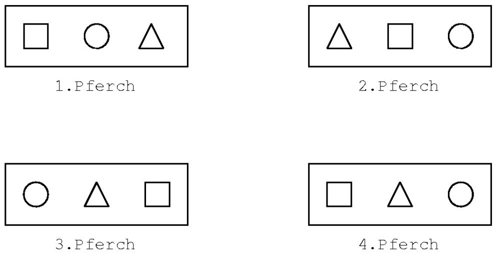


Abbildung 2: Vier Schilder

Kevins Vermutung wird zur Gewissheit, als der Schäfer ihm aufträgt, die Schafe nachzuzählen. In den ersten drei Pferchen zählt Kevin 75, 255 und 183 Tiere. Auf den Schildern am Pferch hat der Schäfer die Anzahl der Schafe in einer Art Geheimcode notiert.

Frage:
Kannst du herausfinden, wieviele Schafe im vierten Pferch sein sollen?

Lösung:

Da der Schäfer drei verschiedene Symbole verwendet um die Zahlen darzustellen, so rechnet er **mindestens** im 3er Zahlensystem (, denn da gibt es die Zahlen 0,1,2). Die größte dreistellige Zahl, die im 3er System darstellbar ist, ist die 2 2 2.
Also $2 * 3^2 + 2 * 3^1 + 2 * 3^0 = 3^3 - 1 = 26$. Da der Schäfer aber Zahlen bis mindestens 255 darstellen kann, kann er nicht im 3er System rechnen.
In 4er System ist die größte dreistellige Zahl die $4^3 - 1 = 63$.
Im 5er System ist es die 124,
im 6er System die 215.
Somit kommen all diese Systeme nicht in Frage. Ebenso kommt das 9er System nicht in Frage, da die kleinste dreistellige Zahl hier die 81 ist, wenn man davon ausgeht, dass die Ziffern, also die Symbole, ungleich Null sind. Bleiben also nur noch das 7er und das 8er System übrig.

Im 8er System lässt sich die Zahl 75 darstellen als 113, die 255 als 377, und die 183 als 267. Also kann die Lösung nicht das 8er System sein, da sonst Quadrat und Kreis beide einmal die 1 und einmal die 7 dastellen müssten.
Somit bleibt nur noch das 7er System, und hier findet man die Lösung.
$75_{10} = 135_7$, $255_{10} = 513_7$, $183_{10} = 351_7$
Somit ergibt sich:

$\triangle \simeq 5$
$\bigcirc \simeq 3$
$\square \simeq 1$

Also befinden sich im vierten Pferch 87 Schafe.

Klasse 11-13

Der Mathelehrer hat Kevins Klasse eine seltsame Hausaufgabe gegeben: Er hat drei positive (nicht ungedingt ganze!) Zahlen an die Tafel geschrieben. Jeder Schüler soll sich zwei der Zahlen aussuchen, diese addieren und mit der dritten multiplizieren.

Am nächsten morgen hatten manche das Endergebnis 46, manche 2000 und manche 2008.

Frage

Kannst du die drei Zahlen bestimmen?

Lösung:

Wir nehmen an, die drei Zahlen an der Tafel seien x,y,z. So können die Schüler folgende Rechnungen ausführen:
$(x + y) * z$, $(x + z) * y$ oder $(z + y) * x$.

Setzen wir:

$$(x + y) * z = 46$$
$$(x + z) * y = 2000$$
$$(z + y) * x = 2008$$

Ausmultiplizieren:

$$xz + yz = 46$$
$$xy + zy = 2000$$
$$zx + yx = 2008$$

Substituieren:

$$a := xz$$
$$b := xy$$
$$c := yz$$

Daraus erbibt sich:

$a + c = 46$, $b + c = 2000$, $a + b = 2008$

Löst man dieses Gleichungssystem, so erhält man:

$a = 27$, $b = 1981$, $c = 19$

Resubstitution: $a = xz = 27$, $b = xy = 1981$, $c = yz = 19$.
Daraus ergibt sich:

$x \approx 53,0576$, $y \approx 37,3368$, $z \approx 0,5089$

Offene Aufgabe

Die offene Aufgabe stammt diesmal aus dem Bereich der Algebra: Gibt es ein Polynom $P(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten, und drei paarweise verschiedene ganze Zahlen a, b, c mit $P(a) = b$, $P(b) = c$, und $P(c) = a$?

Lösung:

Es gibt kein solches Polynom.
Beweis:
Wenn $P(a) = b$, dann ist $P(a) - b = 0$. Also ist a eine Nullstelle des Polynoms $P(a) - b$. Da wir hier nur mit Polynomen auf dem Bereich der ganzen Zahlen rechnen, so muss diese Nullstelle das Polynom teilen. Also gilt:

$a|P(x) - b$. Genauso folgt auch: $b|P(x) - c$ und $c|P(x) - a$.

Weiter ist: $P(P(P(a))) = P(P(b)) = P(c) = a$. Also ist $P(P(P(a))) - a = 0$. Also gilt: $a|P(x) - a$.
Wegen $a|a$ muss gelten $a|P(x)$. Analog folgt: $b|P(x)$ und $c|P(x)$.
Und da $a|P(x) - b$ folgt: $a|b$. Und analog: $b|c$ und $c|a$.

Das bedeutet, dass die Zahlen $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{b}$ und $\frac{a}{c}$ ganzzahlig sein müssen.

Multipliziert man diese miteinander, so erhält man: $\frac{abc}{ac} = 1 \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{a}{c} = 1$.
Also ist $a = b = c$.
Somit gibt es kein solches Polynom.