

Dr. Michael J. Winckler
Mathe-Star-Initiative
IWR, Raum 502, INF 368, 69120 Heidelberg
Michael.Winckler@iwr.uni-heidelberg.de
<http://www.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/Mathe-Star/>



Mathe-Star Lösungen Runde 1 2009/10

Allgemeine Lösungshinweise

Die folgenden Tipps fassen einige Punkte zusammen, die zur *vollständigen und fehlerfreien* Beantwortung von Aufgaben beachtet werden sollten.

1. Enger Bezug zum Aufgabentext

Im Rahmen der Bearbeitung der Frage sollten nur aus den in der Aufgabe explizit genannten Hinweisen Schlüsse gezogen werden. Die Einbeziehung weiterer Annahmen in die Aufgabe ist nur insoweit gerechtfertigt, als sie sich zweifelsfrei aus den allgemeinen Bemerkungen zur Aufgabenstellung ergeben.

Beispielsweise kann von einem *Ball* in einer Aufgabenstellung angenommen werden, dass es sich um eine perfekte Kugel handelt. Vermessungsaufgaben in freier Natur können (falls nicht explizit anders angegeben) in der Ebene (d.h. unter Vernachlässigung der Erdkrümmung) berechnet werden. Von einem *5-Liter-Gefäß* kann man aber *nicht* annehmen, dass es eine Messskala besitzt oder dass man es verwenden kann, um andere Masseinheiten als 5 Liter abzumessen.

2. Vollständigkeit der Antwort und logisches Ableiten

Zu den in der Aufgabenstellung aufgestellten Behauptungen und Fragen muss in der Lösung Stellung bezogen werden. Aus einem Antwortsatz oder einer anderen geeigneten schriftlichen Darlegung muss klar zum Ausdruck kommen, wie die richtige Lösung zum gestellten Problem aussieht.

Zu dieser Antwort sollte im Rahmen der Ausarbeitung der Lösung eine logische Ableitung verfasst werden. Dabei sind alle wesentlichen Gedankenschritte von der Aufgabenstellung bis zur Lösung darzustellen.

Kann aus der Angabe der Lösung unmittelbar deren Richtigkeit festgestellt werden (z.B. bei einem Sudoku), so ist es hilfreich, eine Bemerkung zur *Eindeutigkeit* der gegebenen Lösung zuzufügen. Die Frage, ob es zu einem Problem mehrere Lösungen gibt, ist in der Mathematik von fundamentaler Bedeutung für die Bewertung einer angegebenen bzw. gefundenen Lösung.

3. Lesbarkeit und Darstellung

Die Lösung einer Aufgabe soll es einem neutralen Beobachter ermöglichen, die Richtigkeit des Schlusses nachzuvollziehen und dabei die verwendeten Hilfsmittel kennenzulernen. In diesem Sinne ist eine Darstellung der Lösung vorzuziehen, die prägnant und übersichtlich die Lösungsidee darstellt.

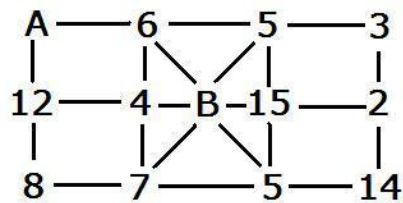
Zeichnungen oder Diagramme können ein Hilfsmittel zur Verdeutlichung eines Lösungswegs sein. Dabei ist aber meist ein ergänzender Kommentar notwendig, um die Lösungsidee verständlich zu machen.

Bei handschriftlichen Lösungen ist zudem eine klare und lesbare Schrift notwendig. Symbole und Kurzschriften sollten erläutert werden, wenn es sich nicht um mathematische Standard(-Schul)-Notation handelt.

Klasse 5-7

Aufgabe: Zahlengitter

Professor Knobel stellt seinem Sohn Kevin eine Aufgabe: Er soll in dem unten abgebildeten Zahlengitter einen Weg von A nach B derart finden, dass das Produkt der dabei überquerten Zahlen genau 352.800 beträgt. Dabei darf jede Zahl nur einmal überquert werden. Kannst du Kevin helfen die Aufgabe zu lösen? Finde alle möglichen Wege.



Lösung:

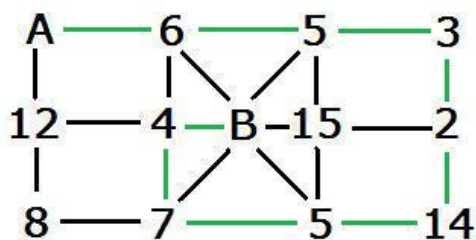
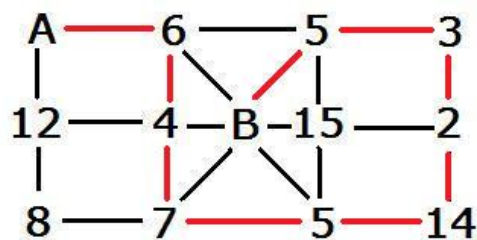
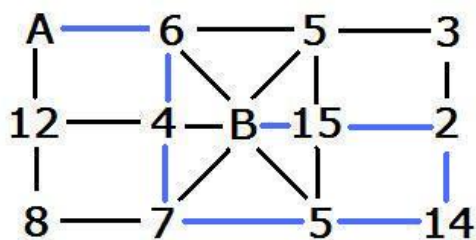
Um nicht alle Wege durchprobieren zu müssen, kann man sich überlegen, in welche Faktoren man die Zahl 352.800 zerlegen kann.

Die Primfaktorzerlegung lautet:

$$352.800 = 2^5 * 3^2 * 5^2 * 7^2$$

Da in dem Zahlengitter nur zwei Zahlen vorhanden sind, die auch den Primfaktor haben, müssen sowohl "7" als auch "14" auf dem Weg von A nach B liegen.

Es gibt die drei folgenden Lösungen:



Klasse 8-10

Aufgabe: Lichterkette

An einer langen Lichterkette gibt es 2009 Glühlampen, die von 1 bis 2009 durchnummeriert sind und alle einen eigenen An-/Aus-Schalter besitzen. Zu Beginn sind alle Lampen aus.

Nun geht eine erste Person durch und betätigt die Schalter aller Lämpchen, deren Nummer durch 1 teilbar ist (das sind natürlich alle). Dann geht eine zweite Person die Lichterkette entlang und betätigt alle Schalter, deren Lampennummer durch 2 teilbar ist usw. Zum Schluss geht die 2009. Person entlang und betätigt alle Schalter, deren Lampennummern durch 2009 teilbar sind (das ist dann nur noch das letzte Lämpchen).

Wie viele Lämpchen sind nach dieser Prozedur angeschaltet?

Lösung:

Der Schalter der Lampe mit der Nummer n wird während der gesamten Prozedur offenbar genau so oft betätigt, wie n Teiler hat, denn die k -te Person betätigt den Schalter n genau dann, wenn die Zahl k die Zahl n teilt.

Bei einer natürlichen Zahl n , die keine Quadratzahl ist, treten die Teiler aber immer in Paaren auf. Zu einem Teiler k gibt es immer einen passenden Teiler k' , für den $k * k' = n$ ist, und dabei ist $k \neq k'$, denn ansonsten wäre $n = k^2$ eine Quadratzahl. Wir können also die Teiler einer Nicht-Quadratzahl n in Paare von zueinander passenden Teilern aufteilen. Eine solche Zahl hat daher stets geradzahlig viele zueinander passende Teiler (Beispiel: $12 = 1 * 12 = 2 * 6 = 3 * 4$).

Genauso sieht man, dass Quadratzahlen $n = k^2$ stets ungeradzahlig viele Teiler haben, denn auch ihre Teiler lassen sich wieder in Paare von Teilern aufteilen, wobei nur k als einzelner übrig bleibt (denn er ist sein eigener passender Teiler).

Daher werden die Schalter, deren Nummer keine Quadratzahl ist, geradzahlig oft betätigt und die zugehörigen Lampen sind somit am Ende der Prozedur genau wie zu Beginn aus. Schalter, deren Nummer eine Quadratzahl ist, werden ungeradzahlig oft betätigt und somit sind die entsprechenden Lampen nach der Prozedur angeschaltet.

Wegen $44^2 = 1936 < 2009 < 2025 = 45^2$ gibt es genau 44 unter den 2009 Lampen, deren Nummer eine Quadratzahl ist, so dass am Ende der Prozedur genau 44 Lampen an sind.

Klasse 11-13

Aufgabe: Zahlenkonstruktion

Wenn man vor eine zweistellige Zahl ihr Doppeltes schreibt, so ergibt sich die Dezimaldarstellung einer vier- oder fünfstelligen Zahl. Solche Zahlen sind zum Beispiel 2613 bzw. 14874.

Welche der auf diese Weise gebildeten Zahlen sind durch 29 teilbar?

Welche der Zahlen, die man auf analoge Weise aus dreistelligen Zahlen erhält, sind durch 29 teilbar?

Lösung:

Sei n eine zweistellige Zahl. Wenn man vor n ihr Doppeltes schreibt, ergibt sich die Dezimaldarstellung der Zahl $m = 2n * 100 + n$. Nun gilt $m = 2n * 100 + n = 201 * n$. Da $201 = 3 * 67$ teilerfremd zu 29 ist, ist m genau dann durch 29 teilbar, wenn n durch 29 teilbar ist. Damit ergeben sich genau folgende drei Möglichkeiten für m : 5829, 11658, 17487.

Ist n nun eine dreistellige Zahl, so ergibt sich die Zahl, die man erhält, wenn man vor n ihr Doppeltes schreibt, als $m = 2n * 1000 + n = 2001 * n$. Es ist aber $2001 = 3 * 23 * 29$. Also sind alle so gebildeten Zahlen m durch 29 teilbar.

Offene Aufgabe

Zeige: Zieht man von einer Zahl, die aus einer geraden Anzahl von Einsen besteht (z.B. 1111), die Zahl ab, die aus halb so vielen Zweien besteht (in diesem Beispiel 22), so erhält man stets eine Quadratzahl (im Beispiel $1089 = 33^2$).

Lösung:

Die Zahl, deren Dezimaldarstellung aus genau $2n$ Einsen besteht, ist gerade ein Neuntel der Zahl, die aus genauso vielen Neunen besteht. Letztere ist aber gerade die Zahl $10^{2n} - 1$.

Die Zahl, die aus $2n$ Einsen besteht, ist also $\frac{1}{9}(10^{2n} - 1)$.

Genauso sieht man, dass die Zahl, die aus n Zweien besteht, als $\frac{2}{9}(10^n - 1)$ geschrieben werden kann.

Die gesuchte Differenz kann man deswegen folgendermaßen umschreiben:

$$\frac{1}{9}(10^{2n} - 1) - \frac{2}{9}(10^n - 1) = \frac{1}{9}(10^{2n} - 1 - 2 * 10^n + 2) = \frac{1}{9}(10^{2n} - 2 * 10^n + 1) = \left(\frac{1}{3}(10^n - 1)\right)^2.$$

Die Zahl in Klammern ist nun die mit genau n Dreien geschriebene natürlich Zahl.

Es gilt also stets:

$$\underbrace{111\dots1}_{2n \text{ Einsen}} - \underbrace{222\dots2}_n \text{ Zweien} = \left(\underbrace{333\dots3}_n \text{ Dreien}\right)^2$$