Dr. Michael J. Winckler
IWR, Raum 502
INF 368
69120 Heidelberg
Michael.Winckler@iwr.uni-heidelberg.de
http://www.iwr.uni-heidelberg.de/~Mathe-Star/

Mathe–Star Lösungen Runde 2 2003/2004

Klasse 5-7

Aufgabe:
Professor Knobel wurde zum Vorsitzenden des Arbeitskreises zur Erarbeitung einer neuen Landesverfassung ernannt. Neun Parteien nehmen unter seiner Führung mit jeweils neun Abgeordneten an diesem Arbeitskreis teil.

Am ersten Arbeitstag trafen sich morgens alle Parteien separat in neun Arbeitsräumen. Jede Partei bestimmte einen Parteisprecher und es ergab sich, dass dies in jeder Partei jeweils die älteste Person war. Die neun Parteisprecher bestimmten nun den jüngsten von ihnen zum Wortführer.

Nachmittags wurden neun Ausschüsse gebildet, jeweils unter dem Vorsitz eines Parteisprechers, und jede andere Partei schickte in jeden Ausschuss einen ihrer Abgeordneten. Die Ausschüsse wählten Ausschussleiter und dies wurde in jedem Ausschuss der jüngste anwesende Politiker. Die neun Ausschussleiter trafen sich daraufhin noch vor dem Abendessen, um ihren ältesten zum Ausschussobmann zu küren.

Nach diesem langen Arbeitstag traf sich Professor Knobel mit dem Wortführer und dem Ausschussobmann. Kannst du sagen, welcher von den beiden der ältere ist? Oder ist das nicht entscheidbar?

Lösung:

Diese Aufgabe erwies sich im Nachhinein als ziemlich schwierig - wohl nicht allein wegen des gestellten Problems, sondern auch wegen der komplizierten Benennungen. Hier also nocheinmal kurz die Zusammenhänge:

Parteien: Es treffen sich neun Parteien, von denen jeder neun Abgeordnete entsendet.

Parteisprecher: Der jeweils älteste Abgeordnete jeder Partei wird Parteisprecher.

Wortführer: Der jüngste Parteisprecher, also der jüngste unter den Parteiältesten, wird Wortführer.

Ausschuss: Auch hiervon gibt es neun Stück - jede Partei entsendet in jeden Ausschuss einen ihrer Abgeordneten.

Ausschussleiter: Der jüngste Abgeordnete eines Ausschusses ist der Ausschussleiter.

Ausschussobmann: Der älteste aller Ausschussjüngsten wird Ausschussobmann.

Um das ganze übersichtlicher zu machen, ordnen wir die 9x9 Abgeordneten in einem quadratischen Gitter an. Da jeder Abgeordnete genau einer Partei und genau einem Ausschuss angehört und diese Zuordnung überschneidungsfrei ist (siehe Aufgabe!), kann man für die Parteien Buchstaben (A,B,...,I) und für die Ausschüsse Zahlen (1,2,...,9) verwenden und jeden Abgeordneten so eindeutig identifizieren.

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9
C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9
E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9
F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9
G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
H1	H2	H3	H4	H5	H6	H7	H8	H9
I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9

Fall 1: Der Wortführer und der Ausschussobmann befinden sich in der gleichen Partei, sind also im Tableau in der gleichen Zeile. Da der Wortführer insbesondere der älteste Abgeordnete seiner eigenen Partei ist, ist er also älter als der Ausschussobmann.

Fall 2: Der Wortführer und der Ausschussobmann befinden sich im gleichen Ausschuss, sind also im Tableau in der gleichen Spalte. Da der Ausschussobmann insbesondere der jüngste Abgeordnete in seinem eigenen Ausschuss ist, ist er jünger als der Wortführer.

Fall 3: Der Wortführer und der Ausschussobmann sind in verschiedenen Parteien und Ausschüssen. Beispielsweise sei der Wortführer C7 und der Ausschussobmann F3:

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9
C1	C2	**C3**	C4	C5	C6	**WF**	C8	C9
D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9
E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9
F1	F2	**AO**	F4	F5	F6	F7	F8	F9
G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
H1	H2	H3	H4	H5	H6	H7	H8	H9
I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9

In diesem Fall kann man folgendermassen argumentieren: Da der Wortführer der Älteste seiner Partei ist, ist er insbesondere älter als der Abgeordnete C3 (dasjenige Mitglied seiner Partei, dass in *den* Ausschuss entsand wurde, in dem der Ausschussobmann auch war.). Und da der Ausschussobmann der jüngste Abgeordnete in seinem Ausschuss ist, ist er jünger als C3. Folglich ist der Ausschussobmann auch in diesem Fall jünger als der Wortführer.

Fall 4: Der Wortführer und der Ausschussobmann sind die gleiche Person. Dieser Fall wird vom Rätsel explizit ausgeschlossen, denn dort heisst es: ,,Nach diesem langen Arbeitstag traf sich Professor Knobel mit dem Wortführer und dem Ausschussobmann.", was darauf hindeutet, dass es sich um zwei verschiedene Personen handelt.

Folglich ist der Wortführer immer älter als der Ausschussobmann.

Klasse 8-10

Aufgabe:
Die Schüler verschiedener Schulen richten auf der Insel Juwelia ihre Sommercamps ein. Die Camps liegen dabei über die Insel verteilt und haben jeweils nur einen Straßenzugang: Vom zentralen Versammlungsplatz, kurz *der Stein* genannt, führt eine Stichstraße zum jeweiligen Camp.

Die Camps sind nach folgenden Regeln angelegt:

1. Eine *Tour* von Camp zu Camp besteht aus dem Weg vom einen Camp zum Stein (S) und dann zum anderen Camp. Bei drei Camps A, B und C gibt es also 6 Touren: ASA, ASB, ASC, BSB, BSC und CSC. Die Touren von einem Camp zum Stein und wieder zurück werden ausdrücklich mit berücksichtigt.
2. Jede Tour ist eine ganze Zahl von Kilometern lang.
3. Keine der Touren ist genau so lang wie eine andere Tour.
4. Kein Camp ist mehr als 35 Kilometer vom Stein entfernt.
5. Unter Einhaltung dieser Regeln sind alle Lager so nah am Stein wie möglich, aber keines ist direkt am Stein.

Wieviele Camps gibt es höchstens auf der Insel und welche Abstände zum Stein haben sie dann?

Lösung:
Gehen wir die vorhandenen Informationen nach und nach durch:

1. Zunächst sollten wir uns überlegen, aus welcher Zahlmenge die Entfernungen zwischen den Camps und dem Stein sind. Da die betrachteten Touren explizit die Touren von jedem Camp zum Stein und zurück beinhalten und da alle Touren ganzzahlig sind, kommt für die Entfernungen zum Lager nur ganzzahlige oder halbzahlige Entfernungen in Frage.
2. Wenn sowohl ganzzahlige als auch halbzahlige Entfernungen auftreten, so wäre mindestens eine Tour nicht ganzzahlig, nämlich die von einem ,,ganzahligen" Lager zum Stein und dann zu einem ,,halbzahligen" Lager.
3. Finden wir eine rein ganzzahlige Lösung, so können wir von jeder Entfernung Lager-Stein 0.5km abziehen und erhalten eine weitere Lösung, bei der alle Touren jeweils 1km kürzer (und demnach auch verschieden) sind. Also ist die optimale Lösung sicher halbzahlig. Umgekehrt können wir aber zu jeder Entfernung Camp-Stein bei einer halbzahligen Lösung 0.5km addieren und erhalten eine rein ganzzahlige Lösung.
4. Aus dem vorher gesagten ergibt sich, dass es ausreicht, eine rein ganzzahlige Lösung zu suchen. Haben wir unter disesn die *beste* Lösung im Sinne von Punkt 5 des Rätsels gefunden, so ziehen wir von jeder Entfernung Camp-Stein in dieser Lösung 0.5km ab und erhalten die global beste Lösung.
5. Versuchen wir nun, möglichst viele Camps anzuordnen. Mit $s(i)$ bezeichnen wir den Abstand des i-ten Camps zum Stein, wobei wir die Camps dem Abstand nach ansteigend ordnen. Beginnen wir mit $s(1) = 1$, $s(2) = 2$, womit für die Tourenmenge gilt: $T_2 = 2, 3, 4$. Erarbeiten wir uns eine Tabelle und berechnen wir die hinzukommenden Touren:

i	$s(i)$	neue Touren
1	1	2
2	2	3,4
3	4	5,6,8
4	8	9,10,12,16
5	13	14,15,17,21,26
6	21	22,23,25,29,34,42
7	31	32,33,35,39,44,52,62

Anm.: Ein Beweis für die Tatsache, daß man bei anderer Wahl keine 8 Camps unterbringen kann, ist ziemlich schwierig.

Somit erhalten wir als beste Lösung: $S = \{0.5, 1.5, 3.5, 7.5, 12.5, 20.5, 30.5\}$.

Klasse 11-13

Aufgabe:

Professor Knobel wirft mit Darts auf eine Dartscheibe. Es ist eine seiner Lieblingsscheiben - nicht rund, sondern quadratisch. Da er nicht besonders gut zielen kann, trifft ein Pfeil die Scheibe an einer *zufälligen* Stelle: Jeder Punkt auf der Scheibe kommt gleichwahrscheinlich als Treffer in Frage.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Pfeil von Professor Knobel, der auf der Scheibe landet, so trifft, dass er der Mitte der Scheibe näher ist, als *jeder* der vier Seiten? Gib deine Lösung in der Form $(a * \sqrt{b} + c)/d$ mit ganzen Zahlen a, b, c, d an.

Lösung:

Die Aufgabe geht davon aus, dass der Wurf die Scheibe an einer zufälligen Stelle trifft. Daher ist die Wahrscheinlichkeit, einen Punkt zu treffen, der näher am Mittelpunkt, als an jeder der vier Seiten liegt, so gross wie das Verhältnis der Fläche dieser Punkte zur Gesamtfläche. In der Abbildung ist von dieser Fläche ein Viertel gezeichnet, nämlich dasjenige Viertel, in dem alle Punkte liegen, die näher an der oberen Seite als an einer der drei anderen Seiten liegen (schwache Schraffur). Das Gesamtbild der Fläche ergibt sich aus der Rotation dieser Fläche um 90, 180 und 270 Grad um den Mittelpunkt.

Die Koordinaten der Punkte A und B sind leicht zu berechnen. Verwendet man ein Koordinatensystem, das seinen Ursprung im Mittelpunt M der Scheibe hat und längs der Seiten (Kantenlänge 2LE) orientiert ist, so hat A die Kooridinaten (0.0/0.5), da er in der Mitte zwischen M und der oberen Seite liegt.

Die Koordinaten des Punktes B erhält man, wenn man bedenkt, dass die diagonale Entfernung von B zu M ganu so gross ist, wie die senkrechte(!!) Entfernung von B zur oberen Seite. Damit hat B die Koordinaten $(\sqrt{2}-1/\sqrt{2}-1)$. Nun fehlt uns noch die Gleichung der begrenzenden Kurve zwischen diesen Punkten, den aus Symmetriegründen sind die Koordinaten von C natürlich $(1-\sqrt{2}/\sqrt{2}-1)$.

Für einen Punkt (x/y) auf der Begrenzungskurve gilt allgemein:

$$\sqrt{(}x^2 + y^2) = 1 - y$$

und somit $x^2 + y^2 = 1 - 2y + y^2$, was zu $y = \frac{1-x^2}{2}$ als Kurvengleichung führt.

Integration zwischen dieser Kurve und den beiden Winkelhalbierenden ergibt für das obere "Kuchenviertel" den Flächeninhalt $A = \frac{14}{3}\sqrt{2} - \frac{19}{3}$. Da es vier von diesen Kuchenviertel gibt, die gesamte Dartscheibe aber einen Flächeninhalt von 4 hat, ist $p = \frac{4}{4}(\frac{14}{3}\sqrt{2} - \frac{19}{3}) = \frac{14}{3}\sqrt{2} - \frac{19}{3} = 0.26633$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit.