Dr. Michael J. Winckler
Mathe–Star–Initiative
IWR, Raum 502, INF 368, 69120 Heidelberg
Michael.Winckler@iwr.uni-heidelberg.de
http://www.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/Mathe-Star/

Mathe–Star Lösungen Runde 2 2004/05

Allgemeine Lösungeshinweise

Die folgenden Tipps fassen einige Punkte zusammen, die zur *vollständigen und fehlerfreien* Beantwortung von Aufgaben beachtet werden sollten.

1. Enger Bezug zum Aufgabentext

   Im Rahmen der Bearbeitung der Frage sollten nur aus den in der Aufgabe explizit genannten Hinweisen Schlüsse gezogen werden. Die Einbeziehung weiterer Annahmen in die Aufgabe ist nur insoweit gerechtfertigt, als sie sich zweifelsfrei aus den allgemeinen Bemerkungen zur Aufgabenstellung ergeben.

   Beispielsweise kann von einem *Ball* in einer Aufgabenstellung angenommen werden, dass es sich um eine perfekte Kugel handelt. Vermessungsaufgaben in freier Natur können (falls nicht explizit anders angegeben) in der Ebene (d.h. unter Vernachlässigung der Erdkrümmung) berechnet werden. Von einem *5-Liter-Gefäß* kann man aber *nicht* annehmen, dass es eine Messskala besitzt oder dass man es verwenden kann, um andere Masseinheiten als 5 Liter abzumessen.

2. Vollständigkeit der Antwort und logisches Ableiten

   Zu den in der Aufgabenstellung aufgestellten Behauptungen und Fragen muss in der Lösung Stellung bezogen werden. Aus einem Antwortsatz oder einer anderen geeigneten schriftlichen Darlegung muss klar zum Ausdruck kommen, wie die richtige Lösung zum gestellten Problem aussieht.

   Zu dieser Antwort sollte im Rahmen der Ausarbeitung der Lösung eine logische Ableitung verfasst werden. Dabei sind alle wesentlichen Gedankenschritte von der Aufgabenstellung bis zur Lösung darzustellen.

   Kann aus der Angabe der Lösung unmittelbar deren Richtigkeit festgestellt werden (z.B. bei einem Sudoku), so ist es hilfreich, eine Bemerkung zur *Eindeutigkeit* der gegebenen Lösung zuzufügen. Die Frage, ob es zu einem Problem mehrere Lösungen gibt, ist in der Mathematik von fundamentaler Bedeutung für die Bewertung einer angegebenen bzw. gefundenen Lösung.

3. Lesbarkeit und Darstellung

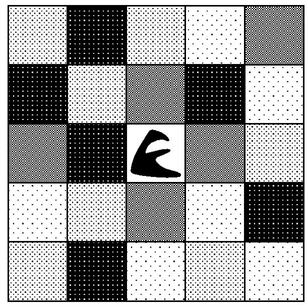
   Die Lösung einer Aufgabe soll es einem neutralen Beobachter ermöglichen, die Richtigkeit des Schlusses nachzuvollziehen und dabei die verwendeten Hilfsmittel kennenzulernen. In diesem Sinne ist eine Darstellung der Lösung vorzuziehen, die prägnant und übersichtlich die Lösungsidee darstellt.

   Zeichnungen oder Diagramme können ein Hilfsmittel zur Verdeutlichung eines Lösungswegs sein. Dabei ist aber meist ein ergänzender Kommentar notwendig, um die Lösungsidee verständlich zu machen.

   Bei handschriftlichen Lösungen ist zudem eine klare und lesbare Schrift notwendig. Symbole und Kurzschriften sollten erläutert werden, wenn es sich nicht um mathematische Standard(-Schul)-Notation handelt.

Klasse 5-7

Frau Knobel hat Ihrem Mann eine schöne Patchworkdecke aus 5x5 Quadraten genäht. In die wickelt sich Professor Knobel immer ein, wenn er über neuen Aufgaben grübelt. Leider hat er gestern abend einen grossen Fleck Johannisbeersaft auf das mittlere Quadrat gemacht, der wohl nicht mehr zu entfernen ist.

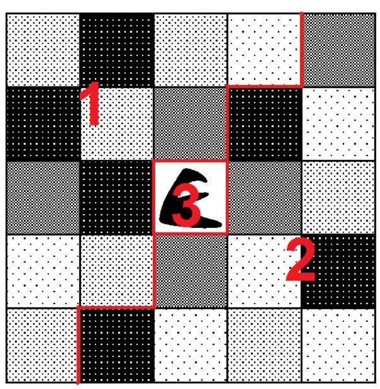


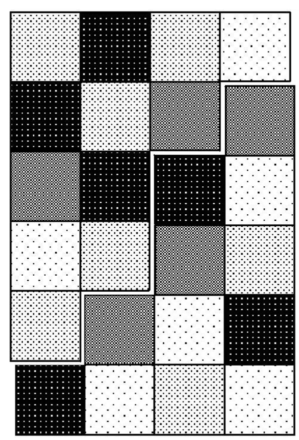
Frau Knobel denkt darüber nach, die Decke längs der Nähte in drei Teile zu trennen: das mittlere Quadrat als ein Teil sowie zwei andere jeweils zusammenhängende Stücke. Danach will sie die beiden fleckfreien Stücke wieder zusammennähen, damit daraus eine Decke aus 4x6 Quadraten entsteht.

Als Professor Knobel abends seine Decke aus dem Schrank nimmt, sieht sie fast wie neu aus: Frau Knobel hat einen Weg gefunden, ihr Vorhaben in die Tat umzusetzen.

Frage: Kannst auch du eine solche Aufteilung der Decke finden, womit man die beiden Reststücken so zusammennähen kann, dass eine 4x6-Decke entsteht.

Lösung:





Klasse 8-10

Wir nennen eine positive ganze Zahl *albanisch*, wenn sie genau soviele Stellen in ihrer Dezimaldarstellung hat, wie sie *verschiedene* Primteiler hat. Finde eine Obergrenze für albanische Zahlen und bestimme die *grösste albanische Zahl.*

Beispiele:

1. $14 = 2 * 7$ Damit ist 14 eine albanische Zahl, denn sie hat zwei Ziffern und zwei verschiedene Primteiler.
2. $693 = 3*3*7*11$ Damit ist 693 eine albanische Zahl, denn sie hat drei Ziffern und drei verschiedene Primteiler.
3. $42 = 2*3*7$ Also ist 42 nicht albanisch, denn sie hat zwei Ziffern, aber drei verschiedene Primteiler.
4. $32 = 2*2*2*2*2$ Also ist 32 nicht albanisch, denn sie hat zwei Ziffern, aber nur einen Primteiler.

Lösung:

Wenn eine Zahl mehr verschiedene Primteiler hat, als sie Stellen in ihrer Dezimalschreibweise hat, kann man sie durch Multiplizieren mit einem oder mehreren ihrer Primteiler vergrößern und so eine albanische Zahl aus ihr machen. Um die größte albanische Zahl zu finden, nutzen wir dies aus und versuchen so viele verschiedene Primzahlen miteinander zu multiplizieren wie möglich, ohne dass das sich daraus ergebende Produkt mehr Stellen aufweist, als wir verschiedene Primzahlen haben. Es ist am geschicktesten kleine Primzahlen zu verwenden, damit der Wert des Produkts mit jedem neuen Primfaktor so langsam wie möglich wächst. Deshalb fangen wir mit der kleinsten Primzahl, der 2, an und multiplizieren sie mit den jeweils nächst größeren Primzahlen, also 3,5,7,11,13,... usw. Das tun wir so lange bis das Produkt der Primzahlen so viele Stellen besitzt wie die Anzahl der verwendetetn Primfaktoren ist.

Es ist: $2 * 3 * 5 * 7 * 11 * 13 * 17 * 19 * 23 * 29 = 6.469.693.230$ (10 Primfaktoren, 10 Stellen)

Wenn man diese Zahl noch mit 31, der nächst höheren Primzahl nach 29, multipliziert, erhält man 200.560.490.130. Diese hat 12 Stellen, aber nur 11 verschiede Primfaktoren, also kann die größe albanische Zahl nicht mehr als 10 Stellen haben.

Die bist jetzt größte gefundene Zahl ist 6.469.693.230. Wir versuchen nun größere albanische Zahlen zu erzeugen, indem wir einen oder mehrere der Primfaktoren zwischen 2 und 29 durch größere ersetzen und so probieren eine größere 10-stellige Zahl zu erzeugen.

Zuerst ersetzten wir die größten der Primfaktoren von 2 bis 29 durch die kleinsten Primzahlen, die wir noch nicht verwendet haben (31 und größer), damit das Produkt nicht an weiteren Stellen gewinnt. Bei dieser Vorgehensweise darf man jedoch nicht mehr als einen Faktor ersetzen, da schon beim Umtausch der zwei größten Fakoren 23 und 29 gegen die nächst größeren Primzahlen 31 und 37 ein 11-stelliges Produkt entsteht (11.125.544.430). Also kann man höchstens einen Faktor ersetzen. Durch Ausprobieren merkt man, dass nur die Faktoren 23 und 29 durch 31 so ersetzt werden können, dass das Produkt 10-stellig bleibt. Nur 29 kann man auch durch höhere Primzahlen ersetzen. Die größte Primzahl, durch die man 29 ersetzen kann, ist die 43.

Also ist die größte albanische Zahl:
$2 * 3 * 5 * 7 * 11 * 13 * 17 * 19 * 23 * 43 = 9.592.993.410$

Klasse 11-13

In einem Hochhaus befinden sich 5 Fahrstühle, die jeweils nur in 5 Sockwerken halten. Trotzdem sind die Fahrstühle so geschickt eingerichtet, dass sich jedes Stockwerk von jedem anderen aus mit einer Fahrstuhlfahrt (d.h. ohne Umsteigen) erreichen lässt.

Frage: Wieviele Stockwerke hat das Haus höchstens? (Gefragt ist nach der grössten Stockwerkzahl, für die man mit 5 solchen Fahrstühlen die Versorgung noch sicherstellen kann.)

Lösung:

Da wir nur 5 Aufzüge haben, die jeweils 5 mal halten, so halten sie ingesamt 25 mal. Hätte man nun ein Haus mit 10 Stockwerken, so müssten auf jedem Stockwerk mindestens 3 Aufzüge halten, da ein Aufzug nur mit 4 weiteren Stockwerken verbunden ist, aber jedes Stockwerk mit insgesamt 9 Stockwerken vebunden sein muss. 3 Halte pro Stockwerk ergeben 30 Halte für 10 Stockwerke. Wir haben aber nur 25 zur Verfügung. Bei 9 Stockwerken reicht es, wenn auf 2 Stockwerken nur 2 Aufzüge halten (und sonst 3), also $3 * 7 + 2 * 2 = 25$. Das heißt, das Hochhaus hat höchstens 9 Stockwerke.

Beispiel:

	Aufzüge				
Stockwerk	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1		×		×	×
2	×				×
3	×		×	×	
4		×		×	×
5	×		×	×	
6	×		×	×	
7		×	×		×
8		×	×		×
9	×	×			