Dr. Michael J. Winckler
Mathe–Star–Initiative
IWR, Raum 502, INF 368, 69120 Heidelberg
Michael.Winckler@iwr.uni-heidelberg.de
http://www.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/Mathe-Star/

Mathe–Star Lösungen Runde 2 2005/06

Allgemeine Lösungeshinweise

Die folgenden Tipps fassen einige Punkte zusammen, die zur *vollständigen und fehlerfreien* Beantwortung von Aufgaben beachtet werden sollten.

1. Enger Bezug zum Aufgabentext

   Im Rahmen der Bearbeitung der Frage sollten nur aus den in der Aufgabe explizit genannten Hinweisen Schlüsse gezogen werden. Die Einbeziehung weiterer Annahmen in die Aufgabe ist nur insoweit gerechtfertigt, als sie sich zweifelsfrei aus den allgemeinen Bemerkungen zur Aufgabenstellung ergeben.

   Beispielsweise kann von einem *Ball* in einer Aufgabenstellung angenommen werden, dass es sich um eine perfekte Kugel handelt. Vermessungsaufgaben in freier Natur können (falls nicht explizit anders angegeben) in der Ebene (d.h. unter Vernachlässigung der Erdkrümmung) berechnet werden. Von einem *5-Liter-Gefäß* kann man aber *nicht* annehmen, dass es eine Messskala besitzt oder dass man es verwenden kann, um andere Masseinheiten als 5 Liter abzumessen.

2. Vollständigkeit der Antwort und logisches Ableiten

   Zu den in der Aufgabenstellung aufgestellten Behauptungen und Fragen muss in der Lösung Stellung bezogen werden. Aus einem Antwortsatz oder einer anderen geeigneten schriftlichen Darlegung muss klar zum Ausdruck kommen, wie die richtige Lösung zum gestellten Problem aussieht.

   Zu dieser Antwort sollte im Rahmen der Ausarbeitung der Lösung eine logische Ableitung verfasst werden. Dabei sind alle wesentlichen Gedankenschritte von der Aufgabenstellung bis zur Lösung darzustellen.

   Kann aus der Angabe der Lösung unmittelbar deren Richtigkeit festgestellt werden (z.B. bei einem Sudoku), so ist es hilfreich, eine Bemerkung zur *Eindeutigkeit* der gegebenen Lösung zuzufügen. Die Frage, ob es zu einem Problem mehrere Lösungen gibt, ist in der Mathematik von fundamentaler Bedeutung für die Bewertung einer angegebenen bzw. gefundenen Lösung.

3. Lesbarkeit und Darstellung

   Die Lösung einer Aufgabe soll es einem neutralen Beobachter ermöglichen, die Richtigkeit des Schlusses nachzuvollziehen und dabei die verwendeten Hilfsmittel kennenzulernen. In diesem Sinne ist eine Darstellung der Lösung vorzuziehen, die prägnant und übersichtlich die Lösungsidee darstellt.

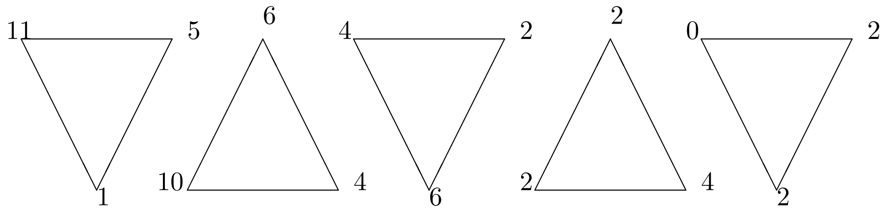
   Zeichnungen oder Diagramme können ein Hilfsmittel zur Verdeutlichung eines Lösungswegs sein. Dabei ist aber meist ein ergänzender Kommentar notwendig, um die Lösungsidee verständlich zu machen.

   Bei handschriftlichen Lösungen ist zudem eine klare und lesbare Schrift notwendig. Symbole und Kurzschriften sollten erläutert werden, wenn es sich nicht um mathematische Standard(-Schul)-Notation handelt.

Klasse 5-7 *Aufgabe*:

Kevin Knobel langweilt sich - und das im Unterricht! Den Ausführungen seines Lehrers kann er heute einfach nicht folgen. Mathe macht er zwar eigentlich ganz gerne, aber manchmal hat er darauf überhaupt keine Lust ... so wie heute.

Aus lauter Langeweile malt er Dreiecksfolgen aufs Papier. Dabei malt er ein Dreieck und versieht dessen Ecken mit drei natürlichen Zahlen (wie 0,1,2,3,4,5,...). Daneben malt er ein neues Dreieck, an dessen Ecken er die Differenzen der Eckzahlen des vorherigen Dreiecks schreibt. Dabei subtrahiert er immer so, dass keine negativen Zahlen enstehen. Diese Konstruktion führt er immer weiter fort. Hier ist ein Beispiel für eine solche Dreiecksreihe:

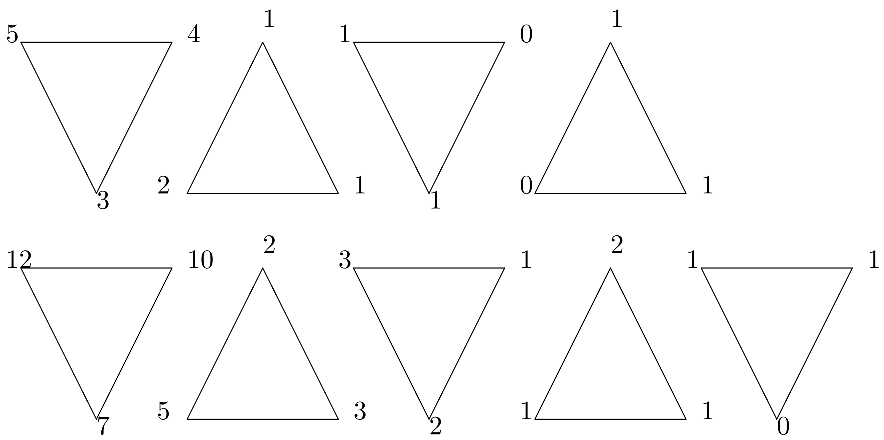


Nachdem er einige Versuche gemacht hat, fällt ihm auf, dass in jeder solchen Dreiecksfolge nach einer gewissen Zeit Stillstand eintritt: Es erscheint immer ein ganz bestimmter Typ von Dreiecken, der sich dann ständig wiederholt.

Kansst du angeben, wie das letzte Dreieck von solchen Folgen immer aufgebaut sein muss? Begründe deine Beobachtung!

Lösung:

Bei dieser Aufgabe ist es besonders hilfreich, sich zunächst einmal mehrere Dreiecksfolgen aufzumalen, um richtig nachvollziehen zu können, was genau bei den einzelnen Schritten passiert.



Was jetzt deutlich geworden ist, ist die Tatsache, dass eine Folge immer genau dann beendet ist, wenn 2 der Eckpunkte die gleiche Zahl haben und der dritte Eckpunkt die 0 hat. Warum ist das so?

Um das zu beantworten, muss man sich nur klar machen, was es heißt, wenn alle drei Eckpunkte unterschiedliche Zahlen haben.

- Da man keine negativen Ergebnisse bekommen darf, kann man zwei Eckpunkte, solange sie unterschiedlich sind, voneinander abziehen, und erhält als kleinstmögliches Ergebnis die 1.

Was passiert, wenn die Eckpunkte nicht mehr unterschiedlich sind?

- Werden zwei gleiche Zahlen subtrahiert, erhält man die 0.

- Irgendetwas minus 0 bleibt unverändert.
- Sobald man also zwei gleiche Zahlen und eine 0 erhalten hat, bleiben die beiden Zahlen, wenn man sie mit 0 subtrahiert gleich, subtrahiert man sie untereinander, so ergibt das wiederum die 0.
- Das Ende der Folge ist erreicht.

Klasse 8-10 *Aufgabe*:

Frau Knobel hat einen Scheck zugeschickt bekommen. Um ihn einzulösen geht sie auf die Bank und stellt sich an der Schlange am einzigen offenen Schalter an. Als sie schließlich drankommt, ist der Kassierer so unkonzentriert und müde, dass er ihr den Cent-Betrag des Schecks als Euro auszahlt und den Euro-Betrag als Cents! Frau Knobel ist jedoch auch nicht mehr ganz bei der Sache, denn sie nimmt das Geld entgegen, ohne es nachzuählen.

Auf dem Heimweg kauft sie für ihren Sohn Kevin noch einen Bleistift für 23 Cents. Als sie daheim ankommt und schließlich doch das Geld nachzählt, fällt ihr auf, dass sie nun genau doppelt soviel Geld hat, wie der Gegenwert des Schecks gewesen wäre.

Welcher Betrag stand auf dem Scheck?

Lösung:

Das Erste, was man tun muss um die Aufgabe zu lösen, ist, sich eine geeignete Gleichung zu überlegen, die den ursprünglichen Betrag des Schecks und den tatsächlich erhaltenen Betrag gleichsetzt. Dies ist nur möglich, wenn man die zwei Informationen, die im Text enthalten sind, mit in die Gleichung einbaut. Der Text zusammengefasst heißt nichts anderes, als dass das Doppelte des Ursprungsbetrag gleich dem erhaltenen Betrag minus 23 Cent ist. In einer Gleichung könnte man das so darstellen:

$$2 * (x \text{ Euro } + y \text{ Cent}) = y \text{ Euro } + x \text{ Cent } - 23 \text{ Cent}$$

Um die Rechnung zu vereinfachen, ist es wichtig, den Euro-Betrag in Cent darzustellen, da man dann nur mit einer Größe arbeiten muss und diese nicht mit dazuschreiben muss (man kann sie wegkürzen).

- 1 Euro = 100 Cent
- Daraus folgt: $2 * (100x + y) = 100y + x - 23$
- Dies lässt sich vereinfachen: $200x + 2y = 100y + x - 23$
- Alle x bzw. y auf einer Seite: $199x = 98y - 23$
- Man erhält eine Gleichung der Form $x + y = z : 98y - 199x = 23$

Nun kann man zunächst nicht weiter vereinfachen, was man jedoch machen kann: Das Verfahren des euklidischen Logarithmus für die Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers anwenden, um damit dann ein lineares Gleichungssystem aufzustellen, das unsere Gleichung mit den zwei Unbekannten konkret darstellen kann. Hierbei geht man wie folgt vor:

1. Zur Vereinfachung setzen wir $98y - 199x = 1$. (Am Ende wird dann wieder mit 23 multipliziert.)
2. ggT(98,199): $-2 * 98 + 199 = 3$
3. ggT(3,98): $-32 * 3 + 98 = 2$
4. ggT(2,3): $-1 * 2 + 3 = 1$
5. ggT(1,2)

Nun kann man das Verfahren von unten nach oben nochmal durchführen, und dabei die einzelnen Ziffern einer Zeile durch die Kombination der Ziffern aus der Reihe darüber darstellen:

- $2 - 1 = 1$
- $2 - (3 - 2) = 1$
- $2 * 2 - 1 * 3 = 1$
- $2 * (98 - 3 * 32) - 1 * 3 = 1$
- $2 * 98 - 65 * 3 = 1$
- $2 * 98 - 65 * (199 - 2 * 98) = 1$
- $132 * \underline{98} - 65 * \underline{199} = 1 \Rightarrow$ Die ursprüngliche Gleichung ist dargestellt.

Auf diesem Weg hat man es also nun geschafft, die gesuchten Unbekannten zu finden. Wenn man diese nun einsetzt, erhält man:

$$132 * 98 - 65 * 199 = 1$$

Dies muss man nun wieder mit 23 multiplizieren, da wir die Gleichung ja am Anfang gleich 1 gesetzt haben.

$$(23 * 132) * 98 - (23 * 65) * 199 = 23 * 1$$

$$3036 * 98 - 1495 * 199 = 23$$

Also wäre $y = 3036$ und $x = 1495$. Allerdings kann man mit diesen 4-stelligen Zahlen den Euro und Cent Betrag nicht darstellen, man benötigt eine 2-stellige Zahl. Um dies zu tun, schaut man, mit welcher Zahl man 98 und 199 höchstens multiplizieren kann, um nicht über 1495 und 3036 hinauszukommen. In diesem Fall wäre das die 15.

$$199 * 98 - 98 * 199 = 0 \ /{*15}$$

$$2985 * 98 - 1470 * 199 = 0$$

Die beiden hierbei erhaltenen Werte zieht man von 3036 und 1495 ab und erhält: $x = 25$ und $y = 51$.

Also stand ursprünglich auf dem Scheck : 25,51 Euro. Überprüfung:

25,51 € würde 51,25 € ergeben.

$51,25$ € $-0,23$ € $= 51,02$ €

$\underline{2 * 25,51 \text{ €} = 51,02 \text{ €}}$

Klasse 11-13 *Aufgabe*

Die Knobels haben zu einem kleinen Abendessen eingeladen. Zu Gast bei Professor Knobel und seiner Frau Mara ist das Ehepaar Mystere aus dem Nachbarhaus. Nachdem das Lammragout verzehrt ist und ein Glas Portwein getrunken wurde, präsentiert Knobel als Dessert sein neuestes Ratespiel.

Er legt auf den Tisch drei Hüte und daneben 8 bunte Anstecknadeln: fünf grüne und drei rote. Die Regeln des Spiels sind denkbar einfach, erklärt der Professor: Wenn ihr drei jetzt gleich kurz rausgeht, werde ich an jedem der drei Hüte zwei Anstecknadeln gut sichtbar befestigen. Die restlichen beiden Nadeln wandern unbenutzt in meine Tasche. Dann bekommt jeder von euch einen Hut auf, ohne dass er die eigenen Anstecknadeln sehen kann. Wer als Erster weiß, welche Nadeln er am Hut trägt, hat gewonnen.

Herr und Frau Mystere sowie die von den Spielen ihres Gatten schon leidgeprüfte Frau Knobel sind einverstanden, mitzuspielen. Knobel trifft die Vorbereitungen und bald darauf sitzen alle wieder zusammen am Tisch, drei davon mit einem etwas seltsamen Hut auf dem Kopf.

Zunächst fragt Knobel Herr Mystere, ob er sich denken könne, welche Farbe die beiden Anstecknadeln an seinem Hut haben. Mystere schaut kurz in die Runde und zuckt dann nur ratlos mit den Schultern.

Als nächstes ist Frau Mystere dran. Sie denkt nur kurz nach und schüttelt dann den Kopf.

Frau Knobels Ehrgeiz ist nun geweckt. Lange starrt sie auf die Hüte der beiden Kontrahenten, aber auch sie ist sich noch nicht sicher - und einfach nur Raten ist ja nicht der Zweck des Spiels.

Also geht die Frage wieder an Herrn Mystere. Angestrengt denkt auch er nach. Als er schließlich doch eingesteht, dass er noch nicht Bescheid weiß, formt sich ein Lächeln auf dem Gesicht von Frau Mystere, die gleich darauf Professor Knobel die Farbe der beiden Nadeln an ihrem Hut mitteilt. Welche?

Lösung:

Es gibt 3 Mitspieler, Herr Mystere (HM), Frau Mystere (FM) und Frau Knobel (FK), und 3 rote (r) sowie 5 grüne (g) Nadeln. Es gibt insgesamt 16 Möglichkeiten, wie diese Nadeln auf die drei Teilnehmer verteilt werden können. In den folgenden Tripeln steht die erste Farbenkombination für HM, die zweite für FM und die dritte für FK.
$(gg, gg, gr), (gg, gg, rr), (gg, gr, gg), (gg, gr, gr), (gg, gr, rr), (gg, rr, gg), (gg, rr, gr)$
$(gr, gg, gg), (gr, gg, gr), (gr, gg, rr), (gr, gr, gg), (gr, gr, gr), (gr, rr, gg)$
$(rr, gg, gg), (rr, gg, gr), (rr, gr, gg)$

1. **Wenn im ersten Durchgang keiner der Spieler auflösen kann, dann hat keiner von ihnen die Kombination [rr].**
   - **HM hat [rr].**
     FM kann auflösen, wenn FK eine rote Nadel hat. Dann hat FM [gg], denn es existieren nur 3 rote Nadeln. Wenn FM nicht auflösen kann, dann weiß FK, dass sie [gg] hat, da sonst FM aufgelöst hätte.
   - **FM hat [rr].**
     HM kann auflösen, wenn FK eine rote Nadel hat. Dann hat HM [gg], denn es existieren nur 3 rote Nadeln. Wenn HM nicht auflösen kann, dann weiß FK, dass sie [gg] hat, da sonst HM aufgelöst hätte.
   - **FK hat [rr].**
     HM kann auflösen, wenn FM eine rote Nadel hat. Dann hat HM [gg], denn es existieren nur 3 rote Nadeln. Wenn HM nicht auflösen kann, dann weiß FM, dass sie [gg] hat, da sonst HM aufgelöst hätte.
   - Es verbleiben folgende Fälle:
     $(gg, gg, gr), (gg, gr, gg), (gg, gr, gr)$
     $(gr, gg, gg), (gr, gg, gr), (gr, gr, gg), (gr, gr, gr)$
2. (gg, gg, gr)
   - FK weiß, dass sie nicht [gg] hat, denn es existieren nur 5 grüne Nadeln. Ferner weiß sie, dass sie nicht [rr], sonst hätte wie in 1. gezeigt bereits FM aufgelöst. Das heißt, FK kann auflösen. Sie hat [gr].
3. (gr, gg, gg)
   - HM weiß, dass er nicht [gg] hat, denn es existieren nur 5 grüne Nadeln. Hätte er [rr], könnte wie in 1. gezeigt spätestens FK aufgelösen. Löst FK nicht auf, kann in diesem Fall HM auflösen, wenn er das zweite Mal an der Reihe ist. Er hat dann [gr].
4. (gr, gg, gr)

- Wenn FM nicht auflösen kann, weiß HM, dass er nicht $[rr]$ hat, denn es existieren nur 3 rote Nadeln. Hätte er $[gg]$, könnte FK wie in 2. gezeigt aufgelösen. Kann auch FK nicht auflösen, weiß HM also, dass er $[gr]$ hat, wenn er zum zweiten Mal an der Reihe ist.

5. Es verbleiben noch folgende Fälle:

   - $(gg, gr, gg), (gg, gr, gr)$
     $(gr, gr, gg), (gr, gr, gr)$

In allen verbleibenden Fällen hat FM die Farbenkombination $[gr]$. FM kann sich absolut sicher sein, dass sie $[gr]$ hat, wenn die das zweite Mal an der Reihe ist. Sie kann dann auflösen.

Frau Mystere teilt Professor Knobel in dem in der Augabe geschilderten Fall die Farben “grün“ und “rot“ mit.