Dr. Michael J. Winckler
Mathe–Star–Initiative
IWR, Raum 502, INF 368, 69120 Heidelberg
Michael.Winckler@iwr.uni-heidelberg.de
http://www.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/Mathe-Star/

Mathe–Star Lösungen Runde 2 2006/07

Klasse 5-7

Aufgabe:

Die Polizei von Einhausen kommt in einem Kriminalfall nicht weiter. Sie hat die vier Verdächtige verhört, die aber alle nur sehr einsilbig antworten:

- Alfred: ,,Carlo ist es gewesen!"
- Benno: ,,Ich war's nicht!"
- Carlo: ,,Ede hat's getan!"
- Ede: ,,Carlo hat gelogen, als er sagte, ich wäre es gewesen!"

Die Situation ist in der Tat vertrackt, zumal sich die Aussagen zum Teil auch noch widersprechen.

1. Der hinzugezogene Psychologe meint, von den vier Verdächtigen würde nur einer die Wahrheit sagen. Wer hat das Verbrechen begangen?
2. Und wenn von den vieren nur einer lügt, wer war dann der Täter?

Lösung:

Ein einfacher Schlüssel zur Lösung dieser Aufgabe ist die Beobachtung, dass Carlo und Ede sich gegenseitig widersprechen und somit nicht beide die Wahrheit sagen können. Auf der anderen Seite können Sie aber auch nicht beide lügen!

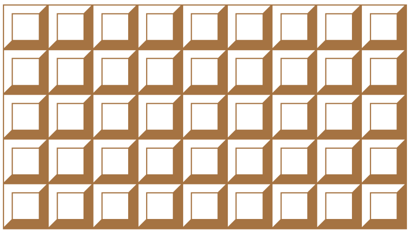
Aufgabe 1 Aus der oben angeführten Begründung müssen Alfred und Benno beide lügen. Zudem lügt noch einer der beiden anderen.

Mit Bennos Aussage ,,Ich war's nicht!", die eine Lüge ist, bekommen wir also die einzig mögliche Lösung auf dem silbernen Tablett serviert. Überprüft man daraufhin nochmals alle Ausagen, so ist alleine die von Ede wahr. Damit haben wir gezeigt, dass nur Benno als Täter in Frage kommt.

Aufgabe 2 Aus der gleichen Grundbetrachtung wie im ersten Teil erhält man nun sofort, dass Alfred und Benno die Wahrheit sagen und damit Carlo der einzig mögliche Täter ist. Auch hier passen wieder alle vier Aussagen ins Bild: Alle ausser Carlo sagen tatsächlich die Wahrheit.

Klasse 8-10

Aufgabe:



Sina Knobel plant eifrig ihre Gebursttagsfete. Allerdings gibt es zwischen Sina und ihrem Vater immer Streit, wieviele Gäste Sina einladen darf. In diesem Jahr hat sich Professor Knobel daher eine wirklich schwierige Aufgabe ausgedacht. Je besser Sina die löst, um so mehr Gäste darf sie einladen.

Jeder Gast, der die Knobelschen Wohnung betritt, soll ein Stück Schokolade bekommen. Dabei steht anfangs eine Tafel mit 9x5 Schokoquadraten zur Verfügung. Sina darf diese Tafel (entlang der Bruchlinien) in Stücke schneiden. Dabei soll jeder Gast ein rechteckiges Stück bekommen, am Enbde soll nichts mehr übrig bleiben ... und keine zwei Stücke dürfen exakt gleich sein. Wieviele Gäste kann Sina einladen?

1. Zeige, wie Sina die Tafel in die von dir angegebene Anzahl von Stücken zerteilen kann.

2. Begründe, warum es keine Zerlegung mit mehr Stücke gibt.

Anmerkung: Quadrate sind auch Rechtecke!

Lösung:

Die Fragen in der Aufgabenstellung geben hier schon die beiden Teilaspekte, an die man berücksichtigen muss, wenn man eine optimale (hier: maximale) Lösung angibt.

Frage 1

Die maximale Anzahl von Stücken ist neun. Eine Zerlegung in neun verschiedene Stücke ist leicht anzugeben. Man kann beispielsweise die Tafel der Länge nach in 5 Reihen zerbrechen und vier dieser Reihen weiter teilen in acht+eins, sieben+zwei sechs+drei und fünf+vier Stücke. Zusammen mit einer 9er-Reihe ergibt dies neun unterschiedliche Rechtecke.

Frage 2

Listet man alle möglichen unterschiedlichen Rechtecke auf, so sieht man, dass in der angegebenen Lösung keinesfalls ausschliesslich die flächenmässig kleinsten Rechtecke verwendet wurden. Trotzdem kann man zeigen, dass selbst bei optimaler Anordnung die Zerlegung in 10 Stücke nicht möglich ist.

Länge	Breite	Fläche
1	1	1
2	1	2
3	1	3
4	1	4
2	2	4
5	1	5

Länge	Breite	Fläche
6	1	6
3	2	6
7	1	7
8	1	8
4	2	8
9	1	9
3	3	9

Diese Tabelle der möglichen Stücke ist aufsteigend nach der Flächengrösse sortiert. Um doppelte Zählung identischer Stücke zu vermeiden, ist die längere Seite in der Spalte *Länge* aufgenommen worden. Zu jeder Fläche gibt es mindestens ein mögliches Stück: Das Rechteck mit Breite 1. Ob es weitere Rechtecke gibt, hängt davon ab, ob sich die Flächengröße noch auf andere Art und Weise in ein Produkt zerlegen läßt, ob sie also weitere Teiler besitzt.

Dass es aber keine Zerlegung der Tafel in mehr als neun Stücke geben kann, sieht man nun leicht: Addiert man die Fläche der zehn *kleinsten* möglichen Teile, so erhält man schon $1+2+3+4+4+5+6+6+7+8 = 46$. Da die Gesamttafel aus 45 Einheiten besteht, kann keine Lösung existieren. Jede Lösung mit zehn anderen Flächenstücken muss mindestens diese Gesamamtgröße von 46 Einheiten haben.

□

Klasse 11-13

Aufgabe:

Im Hause Knobel herrscht purer Stress. Kevin hat gerade versucht, seiner Mutter zu erklären, nach welchen Regeln die Verabredungen für den Abschlussball der Klassenstufe getroffen werden. Die Jungs aus Kevins Clique habe sich gestern getroffen, um endlich eine Lösung zu finden, denn die Situation ist wirklich verfahren.

1. Oliver darf nicht mit Helen hingehen, es sei denn Ben geht mit Miriam und Thomas mit Franziska.
2. Ben darf nicht mir Franziska hingehe, es sei denn Kevin geht mit Zoe und Oliver mit Miriam
3. Thomas darf nicht mit Zoe hingehen, es sei denn Oliver geht mit Helen und und Ben mit Miriam.
4. Oliver darf nicht mit Miriam hingehen, es sei denn Kevin geht mit Zoe und Thomas mit Franziska.
5. Ben darf nicht mir Miriam hingehen, es sei denn Oliver geht mit Zoe und Thomas mit Franziska.
6. Oliver darf nicht mit Zoe hingehen, es sei denn Ben geht mit Helen und Kevin mit Miriam.
7. Kevin darf nicht mit Zoe hingehen, es sei denn Ben geht mit Helen und Oliver mit Franziska.
8. Oliver darf nicht mit Franziska hingehen, es sei denn Ben geht mit Zoe und Thomas mit Helen.
9. Kevin darf nicht mit Miriam hingehen, es sei denn Thomas geht mit Helen.

Frau Knobel sucht sich einen Stift und viel Papier und macht sich mit Kevin daran, eine Lösung für das Problem zu finden. Nach vielem hin und her und einigem wenn und aber finden die beiden schliesslich eine Lösung, die alle Wünsche, Forderungen und Drohungen berücksichtigt (kurz bevor Petra anruft, und unbedingt Kevin sprechen möchte ...).

Finde eine Lösung für das Problem und zeige, ob diese Lösung eindeutig ist.

Lösung:

Schaut man sich die Regeln durch, so fällt auf, dass an Oliver die meisten Bedingungen geknüpft werden. Für jede der vier möglichen Abschlussballpartnerinnen gibt es bei Oliver eine Bedingung. Daher kann man zur Untersuchung, ob es eine oder mehrere Lösungen gibt, Olivers Partnerwahl als Unterscheidungskriterium verwenden.

Fall 1: Oliver geht mit Helen

In diesem Fall geht Ben mit Miriam und Thomas mit Franziska (wg. Bedingung 1). Damit finden sich als viertes Paar Kevin und Zoe. Dies führt aber sofort zum Widerspruch mit Bedingung 7.

Fall 2: Oliver geht mit Miriam

In diesem Fall geht Kevin mit Zoe und Thomas mit Franziska (wg. 4). Damit bleiben als viertes Paar Ben und Helen. Auch hier ergibt sich sofort ein Widerspruch zu Bedingung 7.

Fall 3: Oliver geht mit Zoe

In diesem Fall geht Ben mit Helen und Kevin mit Miriam (wg. 6). Damit finden sich als viertes Paar Thomas und Franziska. Diesmal ergibt sich aus Kevins Wahl ein Widerspruch mit Bedingung 9 (Thomas müsste mit Helen gehen!).

Fall 4: Oliver geht mit Franzika

In diesem Fall geht Ben mit Zoe und Thomas mit Helen (wg. 8). Damit bleiben als viertes Paar Kevin und Miriam.

Die Bedingungen 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7 sind von dieser Regelung garnicht betroffen. Die beiden übrigen beiden Bedingungen werden durch die getroffene Wahl erfüllt.

Die in Fall 4 angegebene Lösung ist somit die einzige, die mit allen Regeln vereinbar ist.

□