Dr. Michael J. Winckler
Mathe–Star–Initiative
IWR, Raum 502, INF 368, 69120 Heidelberg
Michael.Winckler@iwr.uni-heidelberg.de
http://www.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/Mathe-Star/

Mathe–Star Lösungen Runde 2 2007/08

Allgemeine Lösungeshinweise

Die folgenden Tipps fassen einige Punkte zusammen, die zur *vollständigen und fehlerfreien* Beantwortung von Aufgaben beachtet werden sollten.

1. Enger Bezug zum Aufgabentext

   Im Rahmen der Bearbeitung der Frage sollten nur aus den in der Aufgabe explizit genannten Hinweisen Schlüsse gezogen werden. Die Einbeziehung weiterer Annahmen in die Aufgabe ist nur insoweit gerechtfertigt, als sie sich zweifelsfrei aus den allgemeinen Bemerkungen zur Aufgabenstellung ergeben.

   Beispielsweise kann von einem *Ball* in einer Aufgabenstellung angenommen werden, dass es sich um eine perfekte Kugel handelt. Vermessungsaufgaben in freier Natur können (falls nicht explizit anders angegeben) in der Ebene (d.h. unter Vernachlässigung der Erdkrümmung) berechnet werden. Von einem *5-Liter-Gefäß* kann man aber *nicht* annehmen, dass es eine Messskala besitzt oder dass man es verwenden kann, um andere Masseinheiten als 5 Liter abzumessen.

2. Vollständigkeit der Antwort und logisches Ableiten

   Zu den in der Aufgabenstellung aufgestellten Behauptungen und Fragen muss in der Lösung Stellung bezogen werden. Aus einem Antwortsatz oder einer anderen geeigneten schriftlichen Darlegung muss klar zum Ausdruck kommen, wie die richtige Lösung zum gestellten Problem aussieht.

   Zu dieser Antwort sollte im Rahmen der Ausarbeitung der Lösung eine logische Ableitung verfasst werden. Dabei sind alle wesentlichen Gedankenschritte von der Aufgabenstellung bis zur Lösung darzustellen.

   Kann aus der Angabe der Lösung unmittelbar deren Richtigkeit festgestellt werden (z.B. bei einem Sudoku), so ist es hilfreich, eine Bemerkung zur *Eindeutigkeit* der gegebenen Lösung zuzufügen. Die Frage, ob es zu einem Problem mehrere Lösungen gibt, ist in der Mathematik von fundamentaler Bedeutung für die Bewertung einer angegebenen bzw. gefundenen Lösung.

3. Lesbarkeit und Darstellung

   Die Lösung einer Aufgabe soll es einem neutralen Beobachter ermöglichen, die Richtigkeit des Schlusses nachzuvollziehen und dabei die verwendeten Hilfsmittel kennenzulernen. In diesem Sinne ist eine Darstellung der Lösung vorzuziehen, die prägnant und übersichtlich die Lösungsidee darstellt.

   Zeichnungen oder Diagramme können ein Hilfsmittel zur Verdeutlichung eines Lösungswegs sein. Dabei ist aber meist ein ergänzender Kommentar notwendig, um die Lösungsidee verständlich zu machen.

   Bei handschriftlichen Lösungen ist zudem eine klare und lesbare Schrift notwendig. Symbole und Kurzschriften sollten erläutert werden, wenn es sich nicht um mathematische Standard(-Schul)-Notation handelt.

Klasse 5-7

Die Zahl 99 soll in eine Summe von drei natürlichen Zahlen so zerlegt werden, dass der erste Summand ein Vielfaches von 2, der zweite ein Vielfaches von 3 und der dritte ein Vielfaches von 5 ist.

Beispiel: 16 + 33 + 50 = 99.

Aufgabe:

Gib alle möglichen Zerlegungen an, *bei denen zwei der drei Summanden gleich sind*!

Lösung:

Sei also $a + b + c = 99$ und $a = 2x$, $b = 3y$ und $c = 5z$ (,da a ein Vielfaches von 2, b ein Vielfaches von 3 und c ein Vielfaches von 5 sein soll) mit $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{N}$.

Fall 1: $a = b$
Es ist also $2x = 3y$. Das heißt, a und b sind ein Vielfaches von 6, da sie sowohl durch 2 als auch durch 3 teilbar sein müssen. $\Rightarrow a = b = 6w$ mit $w \in \mathbb{N}$
$\Longrightarrow 6w + 6w + 5z = 12w + 5z = 99$

$w = 1 \Rightarrow 5z = 87$
$w = 2 \Rightarrow 5z = 75 \Rightarrow 99 = 12 + 12 + 75$ (da 75 durch 5 teilbar ist)
$w = 3 \Rightarrow 5z = 63$
$w = 4 \Rightarrow 5z = 51$
$w = 5 \Rightarrow 5z = 39$
$w = 6 \Rightarrow 5z = 27$
$w = 7 \Rightarrow 5z = 15 \Rightarrow 99 = 42 + 42 + 15$ (da 15 durch 5 teilbar ist)
$w = 8 \Rightarrow 5z = 3$

Fall 2: $b = c$
Es ist also $3y = 5z$. $\Rightarrow b = c = 15w$ mit $w \in \mathbb{N}$
$\Longrightarrow 2x + 15w + 15w = 2x + 30w = 99$

$w = 1 \Rightarrow 2x = 69$
$w = 2 \Rightarrow 2x = 39$
$w = 3 \Rightarrow 2x = 9$ (Keine dieser Zahlen ist durch 2 teilbar.)

Fall 3: $a = c$
Es ist also $2x = 5z$. $\Rightarrow a = c = 10w$ mit $w \in \mathbb{N}$
$\Longrightarrow 10w + 3y + 10w = 20w + 3y = 99$

$w = 1 \Rightarrow 3y = 79$
$w = 2 \Rightarrow 3y = 59$
$w = 3 \Rightarrow 3y = 39 \Rightarrow 99 = 30 + 39 + 30$ (da 39 durch 3 teilbar ist)
$w = 4 \Rightarrow 3y = 19$

Ergebnis:

$99 = 12 + 12 + 75$
$99 = 42 + 42 + 15$
$99 = 30 + 39 + 30$
Diese drei Zerlegungen sind die einzig möglichen.

Klasse 8-10

Die Zahl 1210 ist eine besondere Zahl. Sie gibt durch sich selbst an, aus welchen Ziffern sie besteht: Sie enthält **1** Nuller, **2** Einser, **1** Zweier und **0** Dreier: **1210**.

Wir nennen Zahlen, die so über ihre eigenen Ziffern Auskunft geben, *selbstbeschreibende Zahlen*. Da unser Zahlsystem aber zehn Ziffern hat, kann es auch zehnstellige selbstbeschreibende Zahlen geben. Eine solche Zahl gibt von vorne nach hinten an, aus wievielen Nullern, Einsern, ..., Neunern Sie besteht.

Fragen:

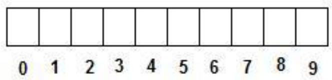
- Was kannst du über die vorderste Ziffer einer selbstbeschreibenden Zahl sagen. Begründe deine Beobachtung!
- Finde eine zehnstellige selbstbeschreibende Zahl!

Lösung:

1:

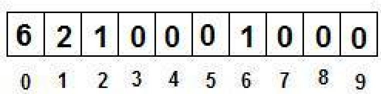
Die vorderste Ziffer einer selbstbeschreibenden Zahl gibt immer an, wieviele Nullen die gesamte Zahl enthält. Da die vorderste Ziffer keine Null sein kann (da sie sonst wegfallen würde, bzw. auch, da in diesem Moment die Ziffer mindestens eine Eins sein müsste, da eine Null vorhanden ist), so muss in einer selbstbeschreibenden Zahl mindesten eine Ziffer Null sein.

2:



Um diese zehnstellige selbstbeschreibende Zahl (es gibt nur eine) zu finden, ist es wichtig, sich klar zu machen, dass die Quersumme einer selbstbeschreibenden Zahl immer ihrer Anzahl an Ziffern entspricht. Nun fängt man hinten an.
Die letzte Ziffer muss eine 0 sein, da es sonst eine 9 gäbe, und dadurch wiederum eine Ziffer, die 9 mal vorkommt, was dann aber nicht mehr möglich ist, da nur noch 8 Ziffern frei sind, weil man an der zweiten Stelle eine 1 braucht. Außerdem wäre die Quersumme dann größer als 10.
Genauso müssen die vorletzte und drittletzte Ziffer eine 0 sein

Somit haben wir schon 3 Nullen. Würden wir nun in 3er Feld (siehe Bild) eine 1 eintragen, und somit auch im 1er Feld eine 1, die dann gleich zur 2 wird, wobei wir im 2er Feld wieder eine 1 bräuchten ... so blieben nur noch das 4er, 5er und 6er Feld frei, die dann nicht mehr passen gefüllt werden könnten.
Genauso klappt es auch nicht, wenn wir 4 oder 5 Nullen haben.
Bei 6 jedoch funktioniert es. Wir schreiben also im 6er Feld eine 1. Schreiben in das Oer Feld eine 6. In das 1er Feld können wir keine 1 schreiben, da wir sonst 2 Einsen haben, also schreiben wir eine 2. Deshalb brauchen wir dann im 2er Feld eine Eins, und Die Rechnung geht auf, wenn wir die restlichen Felder mit Nullen auffüllen.



Klasse 11-13

In einem Spielcasino wird ein besonderes Glücksspiel angeboten: Der Croupier händigt dem Spieler fünf Würfel aus. Der Spieler würfelt erst mit zwei, dann mit drei, darauf mit vier und schliesslich mit allen fünf Würfeln. Wenn in einem der Würfe mehrere Würfel die gleiche Augenzahl zeigen, hat der Spieler sofort verloren. Man gewinnt das Spiel nur dann, wenn man alle vier Würfe übersteht und zudem in allen vier Würfen die gleiche *Augensumme* gewürfelt wurde.

Das Spiel ist unter Glücksspielfreak berühmt. Allerdings sind die verwendeten Würfel ein kleines Geheimnis. Nur folgendes ist bekannt:

1. Alle fünf Würfel sind sechsseitigen und identisch.
2. Die Augensumme aller Seiten eines solchen Würfels ist gerade.
3. Jede Augenzahl ist eine positive Zahl < 11.
4. Alle sechs Augenzahlen sind verschieden
5. Man kann das Spiel gewinnen!

Aufgabe:

Bestimme die Augenzahlen eines solchen Würfels!

Lösung:

Für die Seiten der Würfel kommen die Ziffern 1 bis 10 in Frage.
Da die Augensummen eines jeden Wurfs gleich sein muss, kann man diese Summe sehr einschränken. Sie kleinste Summe, die bei einem Wurf mit fünf Würfeln einstehen kann, ist 15 (1+2+3+4+5), und die größste Summe, die bei einem Wurf mit zwei Würfeln entstehen kann, ist die 19 (9+10).

Nehmen wir an, die Summe sei **15**:
Augenzahlen beim Wurf mit fünf Würfeln: 1+2+3+4+5 (einzig mögliche Kombination)
Augenzahlen beim Wurf mit zwei Würfeln: 10+5 (Ergibt sich zwangsweise, da nur noch eine neue Zahl (hier 10) hinzugenommen werden darf)
Augenzahlen beim Wurf mit vier Würfeln: nicht möglich mit den Zahlen 1,2,3,4,5,10.

Nehmen wir an, die Summe sei **16**:
Augenzahlen beim Wurf mit fünf Würfeln: 1+2+3+4+6 (einzig mögliche Kombination)
Augenzahlen beim Wurf mit zwei Würfeln: 10+6 (Ergibt sich zwangweise.)
Augenzahlen beim Wurf mit drei Würfeln: 10+2+4
Augenzahlen beim Wurf mit drei Würfeln: 10+1+2+3
Mit den Zahlen 1,2,3,4,6 und 10 sind also alle Bedingungen erfüllt.

Wir zeigen noch, dass es keine weiteren Lösungen gibt:

Nehmen wir an, die Summe sei **17**:
Augenzahlen beim Wurf mit fünf Würfeln: 1+2+3+4+7 (oder zweite Möglichkeit: 1+2+3+5+6)
Augenzahlen beim Wurf mit zwei Würfeln: 10+7 (Für die zweite Möglichkeit findet man hier keine Lösung.)
Augenzahlen beim Wurf mit drei Würfeln: 10+3+4
Augenzahlen beim Wurf mit drei Würfeln: 10+1+2+4
Für den Zahlen **1,2,3,4,7 und 10** ist jedoch die Augensumme aller Seiten eines Würfels nicht gerade.

Nehmen wir an, die Summe sei **18**:
Augenzahlen beim Wurf mit fünf Würfeln: 1+2+3+4+8 (Bei allen weiteren Möglichkeiten findet man für den Wurf mit zwei Würfeln keine Lösung.)
Augenzahlen beim Wurf mit zwei Würfeln: 10+8
Augenzahlen beim Wurf mit drei Würfeln: nicht möglich mit den Zahlen 1,2,3,4,8,10.

Nehmen wir an, die Summe sei **19**:
Augenzahlen beim Wurf mit fünf Würfeln: 1+2+3+4+9 (Bei allen weiteren Möglichkeiten findet man für den Wurf mit zwei Würfeln keine Lösung.)
Augenzahlen beim Wurf mit zwei Würfeln: 10+9
Augenzahlen beim Wurf mit drei Würfeln: nicht möglich mit den Zahlen 1,2,3,4,9,10.