Dr. Michael J. Winckler
Mathe–Star–Initiative
IWR, Raum 502, INF 368, 69120 Heidelberg
Michael.Winckler@iwr.uni-heidelberg.de
http://www.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/Mathe-Star/

Mathe–Star Lösungen Runde 2 2008/09

Allgemeine Lösungeshinweise

Die folgenden Tipps fassen einige Punkte zusammen, die zur *vollständigen und fehlerfreien* Beantwortung von Aufgaben beachtet werden sollten.

1. Enger Bezug zum Aufgabentext

   Im Rahmen der Bearbeitung der Frage sollten nur aus den in der Aufgabe explizit genannten Hinweisen Schlüsse gezogen werden. Die Einbeziehung weiterer Annahmen in die Aufgabe ist nur insoweit gerechtfertigt, als sie sich zweifelsfrei aus den allgemeinen Bemerkungen zur Aufgabenstellung ergeben.

   Beispielsweise kann von einem *Ball* in einer Aufgabenstellung angenommen werden, dass es sich um eine perfekte Kugel handelt. Vermessungsaufgaben in freier Natur können (falls nicht explizit anders angegeben) in der Ebene (d.h. unter Vernachlässigung der Erdkrümmung) berechnet werden. Von einem *5-Liter-Gefäß* kann man aber *nicht* annehmen, dass es eine Messskala besitzt oder dass man es verwenden kann, um andere Masseinheiten als 5 Liter abzumessen.

2. Vollständigkeit der Antwort und logisches Ableiten

   Zu den in der Aufgabenstellung aufgestellten Behauptungen und Fragen muss in der Lösung Stellung bezogen werden. Aus einem Antwortsatz oder einer anderen geeigneten schriftlichen Darlegung muss klar zum Ausdruck kommen, wie die richtige Lösung zum gestellten Problem aussieht.

   Zu dieser Antwort sollte im Rahmen der Ausarbeitung der Lösung eine logische Ableitung verfasst werden. Dabei sind alle wesentlichen Gedankenschritte von der Aufgabenstellung bis zur Lösung darzustellen.

   Kann aus der Angabe der Lösung unmittelbar deren Richtigkeit festgestellt werden (z.B. bei einem Sudoku), so ist es hilfreich, eine Bemerkung zur *Eindeutigkeit* der gegebenen Lösung zuzufügen. Die Frage, ob es zu einem Problem mehrere Lösungen gibt, ist in der Mathematik von fundamentaler Bedeutung für die Bewertung einer angegebenen bzw. gefundenen Lösung.

3. Lesbarkeit und Darstellung

   Die Lösung einer Aufgabe soll es einem neutralen Beobachter ermöglichen, die Richtigkeit des Schlusses nachzuvollziehen und dabei die verwendeten Hilfsmittel kennenzulernen. In diesem Sinne ist eine Darstellung der Lösung vorzuziehen, die prägnant und übersichtlich die Lösungsidee darstellt.

   Zeichnungen oder Diagramme können ein Hilfsmittel zur Verdeutlichung eines Lösungswegs sein. Dabei ist aber meist ein ergänzender Kommentar notwendig, um die Lösungsidee verständlich zu machen.

   Bei handschriftlichen Lösungen ist zudem eine klare und lesbare Schrift notwendig. Symbole und Kurzschriften sollten erläutert werden, wenn es sich nicht um mathematische Standard(-Schul)-Notation handelt.

Klasse 5-7

Professor Knobel ist mit seiner Frau im Ausland unterwegs. Auf der letzten Flugstrecke haben die beiden reichlich Souvenirs im Gepäck. Die Koffer wiegen zusammen 47kg. Wenn jeder sein Freigepäck abzieht, muss Herr Knobel noch 56 Euro, seine Frau 42 Euro extra bezahlen.

Wäre Herr Knobel alleine mit dem gesamten Gepäck heimgeflogen, hätte er sogar 378 Euro für sein Übergepäck zahlen müssen.

Fragen:

1. Wieviele Kilo Gepäck darf man als einzelner Reisender bei der von Knobels gebuchten Airline kostenfrei mitnehmen?

2. Was kostet ein Kilo Übergepäck? Und wie schwer waren die beiden Koffer?

Begründe deine Lösung!

Lösung:

1. Das Gepäck wiegt zusammen 47kg und Herr und Frau Knobel zahlen zusammen €56 + €42 = €98.
Das heißt:
(47kg−2∗Freigepäck) kosten €98
(47kg−1∗Freigepäck) kosten €378
⇒ Ein Freigepäck würde €378-€98=€280 kosten, wenn es Übergepäck wäre.

Kosten für Gesamtgepäck:
Müsste Prof. Knobel für das gesamte Gepäck zahlen, so müsste er €280+€280+€98=€658 zahlen.

⇒ Kosten für ein kg Gepäck: €658:47=€14

⇒ Gewicht eines Freigepäcks: €280:€14=20

Als einzelner Reisender darf man also 20kg Gepäck kostenfrei mitnehmen.

2. Ein Kilo Übergepäck kostet €14 (wie oben berechnet).
Prof. Knobel zahlte €56 für sein Übergepäck, das heißt er hatte €56:€14=4, also 4kg Übergepäck. Somit wog sein Koffer 24kg.
Frau Knobel hatte €42:€14=3, also 3kg Übergepäck und ihr Koffer wog 23kg.

Klasse 8-10

Kevin und seine Schwester Sina haben zusammen 10 Münzen von ihren Großeltern bekommen. Dabei ist jede der acht verschiedenen Münzen im Euroraum mindestens einmal vertreten.

Zunächst hat Sina zehnmal soviel Geld wie Kevin. Nachdem jeder der beiden dem anderen eine Münze gegeben hat, hat Sina noch viermal soviel Geld, wie Kevin.

Fragen:

1. Wer hatte zu Anfang welche Münzen?

2. Kannst du die von dir angegebene Lösung rechnerisch (also nicht durch Ausprobieren) herleiten?

Begründe deine Lösung!

Lösung:

1.+2.
Zuerst berechnet man den Gesamtwert der Münzen. Da jede Münze mindestens einmal vertreten ist, ist der Grundbetrag:
$0,01 + 0,02 + 0,05 + 0,10 + 0,20 + 0,50 + 1,00 + 2,00 = 3,88$, also €3,88.
Dazu kommen jetzt noch zwei weitere Münzen. Das könnten mindestens 2∗€0,01, oder höchstens 2∗€2,00 sein.
Also beträgt der Gesamtwert (G_{ges}) der Münzen <u>mindestens</u> €3,90 und <u>höchstens</u> €7,88.

Des Weiteren muss man beachten:
Anfangs hat Sina zehnmal soviel Geld wie Kevin. Sei K_A der Gesamtwert von Kevins Münzen am Anfang, S_A der Gesamtwert von Sinas Münzen am Anfang. Es gilt:
$10 * S_A = 1 * K_A$ und $S_A + K_A = G_{ges}$
$\Rightarrow 10 * K_A + K_A = G_{ges} = 11 * K_A$

Nach dem Tausch einer Münze hat Sina nur noch viermal soviel Geld wie Kevin. Sei K_T der Gesamtwert von Kevins Münzen nach dem Tausch, S_T der Gesamtwert von Sinas Münzen nach dem Tausch. Das heißt:
$4 * S_T = 1 * K_T$ und $S_T + K_T = G_{ges}$
$\Rightarrow 4 * K_T + K_T = G_{ges} = 5 * K_T$

Wegen $G_{ges} = 11 * K_A$ und $G_{ges} = 5 * K_T$
ist G_{ges} durch 11 und durch 5 teilbar. Also ist G_{ges} durch €0,55 teilbar.

Nun betrachtet man die Beträge, die durch €0,55 teilbar sind:
€0,55, €1,10, €1,65, €2,20, €2,75, €3,30, €3,85
Diese Beträge sind alle kleiner als der Gesamtbetrag vom mindestens €3,90.

Weiter:
€4,40, €4,95, €5,50, €6,05, €6,60, €7,15, €7,70
sind mögliche Ergebnisse.

Die nächste Möglichkeit: €8,25 ist größer als der Gesamtbetrag von €7,88.

Man berechnet nun die Differenz zwischen den möglichen Ergebnissen und dem Grundgesamtbetrag der acht verschiedenen Münzen.

€4,40 - €3,88	= €0,52	Erhält man durch €0,50 und €0,02.
€4,95 - €3,88	= €1,07	Nicht mit zwei Münzen darstellbar.
€5,50 - €3,88	= €1,62	Nicht mit zwei Münzen darstellbar.
€6,05 - €3,88	= €2,17	Nicht mit zwei Münzen darstellbar.
€6,60 - €3,88	= €2,72	Nicht mit zwei Münzen darstellbar.
€7,15 - €3,88	= €3,27	Nicht mit zwei Münzen darstellbar.
€7,70 - €3,88	= €3,82	Nicht mit zwei Münzen darstellbar.

Somit ist G_{ges}= €4,40.

Da $G_{ges} = 11 * K_A \Rightarrow K_A =$€0,40 und $S_A =$€4,00.
Und da $G_{ges} = 5 * K_T \Rightarrow K_T =$€0,88 und $S_T =$€3,52.

Am Anfang hat Kevin die Münzen: €0,01+€0,02+€0,02+€0,05+€0,10+€0,20
und Sina hat die Münzen €0,50+€0,50+€1,00+€2,00.

Dann tauscht Kevin eine €0,02 Münzen gegen eine €0,50 Münze.

Klasse 11-13

Prof. Knobel will ein Paket verschicken. Damit der Inhalt nicht leidet, läßt er die Paketbox innen mit einer speziellen Polsterfolie auskleiden. Die Kosten der Polsterfolie richten sich nach der Oberfläche. Als Prof. Knobel die Kosten für die Folie wissen will, misst der Händler die Summe der Kanten der quaderförmigen Kiste sowie die Raumdiagonale aus. Diese beiden Werte verwendet er in einer Tabelle, um die Kosten nachzuschlagen.

Knobel ist verwundert, aber der Händler erklärt ihm, dass alle Kisten, bei denen Kantensumme und Raumdiagonale gleich sind, auch den gleichen Folienpreis ergeben.

Fragen

1. Beweise die Aussage des Händlers: Kisten mit gleicher Kantensumme und Raumdiagonale haben die gleiche Oberfläche.

2. Finde zwei unterschiedliche Kisten mit gleicher Oberfläche, bei denen jede Kante und die Raumdiagonalen ganzzahlig sind.

Lösung:

1. Beweis:
Seien A bzw. E Kisten mit den Kantenlängen a, b, c bzw. e, f, g.
Wenn die beiden Kisten die gleiche Kantensumme haben, dann gilt:

$$2a + 2b + 2c = 2e + 2f + 2e \tag{1}$$

Wenn die Raumdiagonalen gleich sind, dann gilt:

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{e^2 + f^2 + g^2} \tag{2}$$

Wir wollen zeigen, dass wenn die Gleichungen (1) und (2) erfüllt, dass dann die Kisten die gleiche Oberfläche haben.
Es soll also gelten: $2ab + 2ac + 2bc = 2ef + 2eg + 2fg$.

Aus Gleichung (2) folgt:

$$a^2 + b^2 + c^2 = e^2 + f^2 + g^2 \tag{3}$$

Aus Gleichung (1) folgt:

$$a + b + c = e + f + e \tag{4}$$

Quadrieren von (4) liefert:

$$(a + b + c)^2 = (e + f + e)^2 \tag{5}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = e^2 + f^2 + g^2 + 2ef + 2eg + 2fg \tag{6}$$

Subtrahieren der Gleichung (3) von (6):

$$2ab + 2ac + 2bc = 2ef + 2eg + 2fg \tag{7}$$

$\Rightarrow$ Die Kisten A und E mit gleicher Kantensumme und Raumdiagonale haben die gleiche Oberfläche. *qed.*

2. Damit die Raumdiagonale ganzzahlig ist, muss $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ ganzzahlig sein. Gesucht sind also vier natürliche Zahlen a,b,c,d für die gilt $a^2+b^2+c^2=d^2$.

Diese sind zum Beispiel:
(1,2,2,3)
(2,3,6,7)
(2,6,6,9)
(4,4,7,9)
(1,4,8,9)
(2,5,14,15)

Da wir zwei unterschiedliche Kombinationen suchen (unterschiedliche Kisten/Kanten), die aber in der letzten Komponente gleich sind (gleiche Raumdiagonale), könnten eine mögliche Lösung sein: $a=2, b=6, c=6$ und $e=4, f=4, g=7$

Offene Aufgabe

Die offene Aufgabe der zweiten Runde führt in ein sehr schönes Gebiet der klassischen Zahlentheorie:

Was ist die kleinste natürliche Zahl n, für die 2^n-1 durch 1001 teilbar ist. Die Antwort zu finden ist diesmal nicht ganz so schwer ... das Umfeld dieser Lösung ist auch sehr interessant. Geht's ohne Computersuche?

Lösung:

Eine Zahl ist genau dann durch 1001 teilbar, wenn sie durch die Primfaktoren von 1001 teilbar ist, also durch 7, 11 und 13.
Das heißt, gesucht ist die kleinste Zahl n , für die 2^n-1 durch 7, 11 und 13 teilbar ist.
Einfacher ist es zuerst die Reste von 2^n zu betrachten, wenn man 2^n durch 7 (bzw. 11 und 13) teilt. Hier ergeben sich Perioden (siehe Tabelle), da jede Zahl das Doppelte ihres Vorgänges ist. Für 2^n-1 erhält man dann das Ergebnis der Modulodivision, indem man noch 1 abzieht.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
$2^n \pmod 7$	1	2	4	1	2	...									
$2^n-1 \pmod 7$	0	1	3	0	1	...									
$2^n \pmod{11}$	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6	1	2	...		
$2^n-1 \pmod{11}$	0	1	3	7	6	9	8	6	2	5	0	1	...		
$2^n \pmod{13}$	1	2	4	8	3	6	12	11	9	5	10	7	1	2	...
$2^n-1 \pmod{13}$	0	1	3	7	2	5	11	10	8	4	9	6	0	1	...

Aus der Tabelle kann man ablesen:

2^n-1 ist durch 7 teilbar ($2^n-1 \equiv 0 \pmod 7$) genau dann, wenn $n \equiv 0 \pmod 3$.
2^n-1 ist durch 11 teilbar ($2^n-1 \equiv 0 \pmod{11}$) genau dann, wenn $n \equiv 0 \pmod{10}$.
2^n-1 ist durch 13 teilbar ($2^n-1 \equiv 0 \pmod{13}$) genau dann, wenn $n \equiv 0 \pmod{12}$.

Das kleinste n, das durch 3, 10 und 12 teilbar ist, ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen.
$3=3$, $10=2*5$, $12=2*3*3$
$\Rightarrow \mathrm{kgV}(3,10,12)=2*3*3*5=60$

Somit ist 60 die kleinste natürliche Zahl n, für die 2^n-1 durch 1001 teilbar ist.