Dr. Michael J. Winckler
Mathe–Star–Initiative
IWR, Raum 502, INF 368, 69120 Heidelberg
Michael.Winckler@iwr.uni-heidelberg.de
http://www.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/Mathe-Star/

Mathe–Star Lösungen Runde 3 2004/05

Allgemeine Lösungeshinweise

Die folgenden Tipps fassen einige Punkte zusammen, die zur *vollständigen und fehlerfreien* Beantwortung von Aufgaben beachtet werden sollten.

1. Enger Bezug zum Aufgabentext

   Im Rahmen der Bearbeitung der Frage sollten nur aus den in der Aufgabe explizit genannten Hinweisen Schlüsse gezogen werden. Die Einbeziehung weiterer Annahmen in die Aufgabe ist nur insoweit gerechtfertigt, als sie sich zweifelsfrei aus den allgemeinen Bemerkungen zur Aufgabenstellung ergeben.

   Beispielsweise kann von einem *Ball* in einer Aufgabenstellung angenommen werden, dass es sich um eine perfekte Kugel handelt. Vermessungsaufgaben in freier Natur können (falls nicht explizit anders angegeben) in der Ebene (d.h. unter Vernachlässigung der Erdkrümmung) berechnet werden. Von einem *5-Liter-Gefäß* kann man aber *nicht* annehmen, dass es eine Messskala besitzt oder dass man es verwenden kann, um andere Masseinheiten als 5 Liter abzumessen.

2. Vollständigkeit der Antwort und logisches Ableiten

   Zu den in der Aufgabenstellung aufgestellten Behauptungen und Fragen muss in der Lösung Stellung bezogen werden. Aus einem Antwortsatz oder einer anderen geeigneten schriftlichen Darlegung muss klar zum Ausdruck kommen, wie die richtige Lösung zum gestellten Problem aussieht.

   Zu dieser Antwort sollte im Rahmen der Ausarbeitung der Lösung eine logische Ableitung verfasst werden. Dabei sind alle wesentlichen Gedankenschritte von der Aufgabenstellung bis zur Lösung darzustellen.

   Kann aus der Angabe der Lösung unmittelbar deren Richtigkeit festgestellt werden (z.B. bei einem Sudoku), so ist es hilfreich, eine Bemerkung zur *Eindeutigkeit* der gegebenen Lösung zuzufügen. Die Frage, ob es zu einem Problem mehrere Lösungen gibt, ist in der Mathematik von fundamentaler Bedeutung für die Bewertung einer angegebenen bzw. gefundenen Lösung.

3. Lesbarkeit und Darstellung

   Die Lösung einer Aufgabe soll es einem neutralen Beobachter ermöglichen, die Richtigkeit des Schlusses nachzuvollziehen und dabei die verwendeten Hilfsmittel kennenzulernen. In diesem Sinne ist eine Darstellung der Lösung vorzuziehen, die prägnant und übersichtlich die Lösungsidee darstellt.

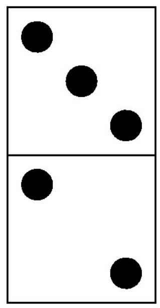
   Zeichnungen oder Diagramme können ein Hilfsmittel zur Verdeutlichung eines Lösungswegs sein. Dabei ist aber meist ein ergänzender Kommentar notwendig, um die Lösungsidee verständlich zu machen.

   Bei handschriftlichen Lösungen ist zudem eine klare und lesbare Schrift notwendig. Symbole und Kurzschriften sollten erläutert werden, wenn es sich nicht um mathematische Standard(-Schul)-Notation handelt.

Sektion 1: Klasse 5-7

Aufgabe 1.1

Dominosteine haben auf ihren beiden Hälften je eine Zahl von 0 bis 6. Da jede mögliche Kombination einmal vorkommt, hat ein solches Dominospiel 28 Steine. Wir entfernen den 0/0-Stein und bilden mit den restlichen Steinen Brüche, indem wir jeden Stein aufrecht hinstellen und die beiden Hälften als Zähler und Nenner ansehen:



$$= \frac{3}{2}$$

Wenn man alle 27 verbliebenen Domino-Steine so als Brüche hinlegt und dann addiert, was ist die niedrigste Zahl, die dabei als Summe entsteht? Beachte, dass man durch Null nicht teilen kann!

Lösung:

Die niedrigste Zahl entsteht, wenn man alle Steine so dreht, dass die größere Zahl unten ist, denn je größer der Nenner, desto kleiner die Zahl.
Das bedeutet, dass alle Dominosteine, die eine Null enthalten, wegfallen, denn $\frac{0}{4} = 0$.
Addieren wir nun zuerst die Brüche mit einer Sechs im Nenner, dann die mit einer Fünf usw.:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{1} + \\
&\tfrac{2}{6} + \tfrac{2}{5} + \tfrac{2}{4} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{2} + \\
&\tfrac{3}{6} + \tfrac{3}{5} + \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{3} + \\
&\tfrac{4}{6} + \tfrac{4}{5} + \tfrac{4}{4} + \\
&\tfrac{5}{6} + \tfrac{5}{5} + \\
&\tfrac{6}{6} =
\end{aligned}$$

$$\tfrac{21}{6} + \tfrac{15}{5} + \tfrac{10}{4} + \tfrac{6}{3} + \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{1} = 13\tfrac{1}{2}$$

Wenn man also alle 27 verbliebenen Domino-Steine so als Brüche hinlegt und dann addiert, ist die niedrigste Zahl, die dabei als Summe entsteht, die $13\frac{1}{2}$.

Aufgabe 1.2

An einem Tag im Jahr 2004 sagte Kevin Knobel zu seinem besten Freund: “Vorgestern war ich zwölf. Nächstes Jahr werde ich 15”.

Wann ist Kevin Knobel geboren?

Lösung:

Kevin Knobel ist am 31.12.1990 geboren.

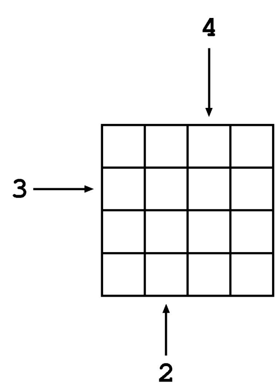
Am 31.12.2003 ist er somit 13 geworden, das heißt, der war am 30.12.2003 noch 12. Am 01.01.2004 sagt er: “Vorgestern war ich zwölf.” Das ist somit korrekt.

Und der sagt:“ Nächstes Jahr werde ich 15”. Mit “nächstes Jahr” meint er dann 2005 und am 31.12.2005 wird er tatsächlich 15.

Aufgabe 1.3

Professor Knobel macht einen Ausflug nach Mainstadt. In dieser internationalen Bankenmetropole wachsen die Häuser buchstäblich in den Himmel! Das zentrale Bankenviertel besteht aus einen quadratischen Block mit 4x4 Hochhäusern. Die Hochhäuser teilt man nach ihrer Höhe in vier Kategorien ein: von den kleinsten in Kategorie **I** über **II** und **III** bis zu den höchsten in Kategorie **IV**.

Bei einer Umrundung des Bankenviertels hat sich Professor Knobel jeweils eine Häuserzeile aus Südrichtung, Westrichtung und Nordrichtung angesehen. Da aber grössere Hochhäuser die kleineren verdecken, konnte er manchmal nicht alle 4 Häuser der jeweiligen Hauszeile sehen. Wieviele Häuser er jeweils sehen konnte, hat er in einer Skizze festgehalten



Als der Bürgermeister im später erklärte, dass aufgrund des Bebauungsplans in jeder Häuserreihe (4x N-S bzw 4x O-W) jeweils je ein Haus der vier Kategorien steht, konnte der Professor den gesamten Bebauungsplan rekonstruieren. Kannst du das auch?

Lösung:

IV	**II**	**I**	**III**
I	**III**	**II**	**IV**
II	**IV**	**III**	**I**
III	**I**	**IV**	**II**

Aufgabe 1.4

Als Kevin Knobel aus den Sommerferien zurückkommt, hat er seinen Freunden viel zu erzählen:

"Wir haben einmal in einem Hotel mit amerikanischem Kabel-Fernsehen übernachtet. Ich konnte mir die ganze Nacht den Comic-Kanal ansehen. Die Kanalnummer weiss ich nicht mehr, aber wenn man sie verdoppelt hat und 7 dazuzählte, kam man zu einem Kanal, auf dem es nur Football gab. Wenn man dessen Nummer verdoppelte und 7 dazuzählte, kam man zu einem Kanal mit Soaps - das wollte mein Vater sehen! Und wenn man die Nummer verdoppelte und 7 dazuzählte, kam man zum Nachrichtenkanal."

"Dann gab's da ja irre viele Kanäle!", sagte einer seiner Freunde. "Nö!", antwortete Kevin: "Auf der Fernbedienung konnte man nur zweistellige Nummern eingeben. Und mein Vater mit seinem Mathematik-Tick hatte nur für die Kanäle bezahlt, die eine Primzahl als Nummer hatten! Die anderen waren alle verschlüsselt."

Konnte Frau Knobel sich die Nachrichten ansehen?

Anmerkung: Eine Primzahl hat genau zwei Teiler: 1 *und sich selbst. Primzahlen sind daher:* 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...

Lösung:

Der Comic-Kanal lief auf Kanal 05, denn dann lief Football auf Kanal 17, die Soaps auf Kanal 41 und die Nachrichten auf Kanal 89. Das sind alles Primzahlen mit weniger als drei Stellen. Also konnte in diesem Fall Frau Knobel sich die Nachrichten ansehen.

Wären die Kanäle die 02, 11, 29 und 65 gewesen, dann hätte man die Nachrichten nicht sehen können, da 65 keine Primzahl ist. Und auch bei 17, 41, 89 und 185 hätte man die Nachrichten nicht sehen können.