Dr. Michael J. Winckler
Mathe–Star–Initiative
IWR, Raum 502, INF 368, 69120 Heidelberg
Michael.Winckler@iwr.uni-heidelberg.de
http://www.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/Mathe-Star/

Mathe–Star Lösungen Runde 3 2007/08

Allgemeine Lösungeshinweise

Die folgenden Tipps fassen einige Punkte zusammen, die zur *vollständigen und fehlerfreien* Beantwortung von Aufgaben beachtet werden sollten.

1. Enger Bezug zum Aufgabentext

   Im Rahmen der Bearbeitung der Frage sollten nur aus den in der Aufgabe explizit genannten Hinweisen Schlüsse gezogen werden. Die Einbeziehung weiterer Annahmen in die Aufgabe ist nur insoweit gerechtfertigt, als sie sich zweifelsfrei aus den allgemeinen Bemerkungen zur Aufgabenstellung ergeben.

   Beispielsweise kann von einem *Ball* in einer Aufgabenstellung angenommen werden, dass es sich um eine perfekte Kugel handelt. Vermessungsaufgaben in freier Natur können (falls nicht explizit anders angegeben) in der Ebene (d.h. unter Vernachlässigung der Erdkrümmung) berechnet werden. Von einem *5-Liter-Gefäß* kann man aber *nicht* annehmen, dass es eine Messskala besitzt oder dass man es verwenden kann, um andere Masseinheiten als 5 Liter abzumessen.

2. Vollständigkeit der Antwort und logisches Ableiten

   Zu den in der Aufgabenstellung aufgestellten Behauptungen und Fragen muss in der Lösung Stellung bezogen werden. Aus einem Antwortsatz oder einer anderen geeigneten schriftlichen Darlegung muss klar zum Ausdruck kommen, wie die richtige Lösung zum gestellten Problem aussieht.

   Zu dieser Antwort sollte im Rahmen der Ausarbeitung der Lösung eine logische Ableitung verfasst werden. Dabei sind alle wesentlichen Gedankenschritte von der Aufgabenstellung bis zur Lösung darzustellen.

   Kann aus der Angabe der Lösung unmittelbar deren Richtigkeit festgestellt werden (z.B. bei einem Sudoku), so ist es hilfreich, eine Bemerkung zur *Eindeutigkeit* der gegebenen Lösung zuzufügen. Die Frage, ob es zu einem Problem mehrere Lösungen gibt, ist in der Mathematik von fundamentaler Bedeutung für die Bewertung einer angegebenen bzw. gefundenen Lösung.

3. Lesbarkeit und Darstellung

   Die Lösung einer Aufgabe soll es einem neutralen Beobachter ermöglichen, die Richtigkeit des Schlusses nachzuvollziehen und dabei die verwendeten Hilfsmittel kennenzulernen. In diesem Sinne ist eine Darstellung der Lösung vorzuziehen, die prägnant und übersichtlich die Lösungsidee darstellt.

   Zeichnungen oder Diagramme können ein Hilfsmittel zur Verdeutlichung eines Lösungswegs sein. Dabei ist aber meist ein ergänzender Kommentar notwendig, um die Lösungsidee verständlich zu machen.

   Bei handschriftlichen Lösungen ist zudem eine klare und lesbare Schrift notwendig. Symbole und Kurzschriften sollten erläutert werden, wenn es sich nicht um mathematische Standard(-Schul)-Notation handelt.

Klasse 5-7
Aufgabe 1.1

Im 'Buch der Wahrheit' stehen seltsame Dinge: Auf der ersten Seite steht: 'In diesem Buch steht genau eine falsche Aussage'. Auf der zweiten Seite steht: 'In diesem Buch stehen genau zwei falsche Aussagen'. Und so weiter, bis schließlich auf Seite 2008, der letzten Seite, steht: 'In diesem Buch stehen genau 2008 falsche Aussagen'. Wie viele falsche Aussagen stehen nun tatsächlich in diesem Buch und wo stehen sie gegebenenfalls?

Lösung:

Um diese Aufgabe zu lösen, muss man sich zunächst klar machen, was genau es bedeutet, wenn auf jeder Seite steht, dass genauso viele falsche Aussagen vorhanden sind, wie die entsprechende Seitenzahl lautet.

- Auf Seite 1 steht, es gibt eine falsche Aussage. Wäre diese Aussage wahr, müssten insgesamt 2007 Aussagen in dem Buch wahr sein.
- Allerdings kann dies nicht sein, da sich diese 2007 Aussagen alle widersprechen.
- Dieses Spiel lässt sich nun immer weiter fortführen:
- Seite 2 würde bedeuten, dass 2006 Antworten wahr sind, die sich jedoch alle widersprechen.
- Seite 3 würde bedeuten, dass 2005 Antworten wahr sind, die sich jedoch alle widersprechen.
- Nun ist leicht zu erkennen, dass nur eine einzige Aussage in dem Buch wahr sein kann, denn wenn man auf diese Weise bei Seite 2006 angelangt wäre, wären noch zwei Aussagen wahr, welche sich jedoch ebenfalls widersprechen.
- Wenn nun jedoch nur eine Aussage wahr ist, dann sind wiederum 2007 Aussagen falsch. Genau das steht auf Seite 2007.

Aufgabe 1.2

Die Knobels sind bei Oma Knobel zum Geburtstag. Die alte Dame drückt ihren drei Enkelkindern Kevin, Sina und Wanda zusammen 10 Euro in die Hand, die die drei gerecht unter sich aufteilen sollen. Leider geht das mit 10 Euro nicht. Oma Knobel hat daraufhin einen Vorschlag: Die Enkelkinder wollen ja alle drei im Anschluss an den Geburtstag noch ein paar Feiertage bei ihrer Oma verbringen. Am Tag nach dem Geburtstag wird Oma Knobel also noch einen Euro zu den 10 Euro dazulegen (insgesamt also 11 Euro), am Tag danach *weitere zwei* (zusammen dann 13 Euro), am Tag darauf noch drei Euro und so weiter. Irgendwann sollte sich der gesamte Geldhaufen ja in drei gleiche Teile teilen lassen. Wann können Kevin, Sina und Wanda das Geld unter sich aufteilen. Begründe deine Antwort!

Lösung:

Hier sollte man zunächst einmal schauen, wie genau sich der Geldzuwachs an den entsprechenden Tagen verhält:

Tag	Geld	= 10 +
1	11 Euro	1
2	13 Euro	3
3	16 Euro	6
4	20 Euro	10
5	25 Euro	15
6	31 Euro	21
...	...	...

Man erkennt hierbei, dass der erhaltene Betrag nie durch 3 teilbar ist, da immer ein Rest übrig bleibt. Allerdings sind diese 6 Tage noch kein hinreichender Beweis dafür, dass auf diese Weise niemals ein durch 3 teilbarer Wert ensteht. Um dies zu beweisen, stellt man den Betrag mathematisch da als

$10 + \sum_{i=1}^{t} i$,

wobei t für die Anzahl der Tage steht.

Fall 1: Betrachtet man die Summe für ein $t = 3, 6, 9, 12...$, so ist sie immer durch drei teilbar, denn andiert man drei aufeinanderfolgende Zahlen
$(x) + (x + 1) + (x + 2) = 3x + 3$
so ist die Summe durch drei teilbar. Also auch, wenn man 6,9,12,... aufeinanderfolgende Zahlen addiert. Demzufolge ist $\sum_{i=1}^{t} i$ durch drei teilbar und $10 + \sum_{i=1}^{t} i$ nicht.

Fall 2: Für $t = 1, 4, 7, 10...$ gilt $\sum_{i=1}^{t} i = \sum_{i=1}^{t-1} i + t$ mit $t - 1 = 3, 6, 9, 12...$
Da $\sum_{i=1}^{t-1} i$ durch drei teilbar ist, bleibt nur noch t zu teilen, also $10 + t = 11, 14, 17, 20....$ Doch das ist auch nicht durch 3 teilbar.

Fall 3: Bleibt noch der letzte Fall. Sei $t = 2, 5, 8, 11....$ Auch hier gilt $\sum_{i=1}^{t} i = \sum_{i=1}^{t-2} i + (t - 1) + t$ mit $t - 2 = 3, 6, 9, 12...$
Da $\sum_{i=1}^{t-2} i$ durch drei teilbar ist, bleibt nur noch $(t - 1) + (t) = 2t - 1 = 3, 9, 15, 21...$ und das ist auch durch drei teilbar. Somit ist $\sum_{i=1}^{t} i$ durch drei teilbar und $10 + \sum_{i=1}^{t} i$ nicht.

Das Geld kann also nie unter drei Kindern aufgeteilt werden

Aufgabe 1.3

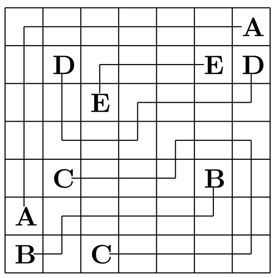
Professor Knobel arbeit seit neuestem wieder für die Stadtverwaltung. In einem Parkgelände wurden 10 Gartenbereiche angelegt. Nun sollen die Bereiche jeweils paarweise mit japanischen Gartenwegen verbunden werden. Der Landschaftsarchitekt möchte die Wege auf einem Rasterfeld anordnen. Dabei beginnen die Wege an jeweils einem der einander zugeordneten Bereiche (A-E) und führen zum zweiten Bereich mit dem gleichen Buchstaben.

Regeln:

- Die Wege führen durch die Rasterkästchen und können dabei in der Mitte der Kästchen auch um 90 Grad abknicken.
- Die Wege dürfen sich nicht schneiden! In jedem Kästchen darf also nur ein Weg verlaufen!
- Am Ende sollen die 5 Gartenbereichspaare jeweils paarweise mit Wegen verbunden sein.

Hilf Professor Knobel bei der Planung und finde eine Lösung, bei der diese Regeln für die Gartenwege erfüllt sind!

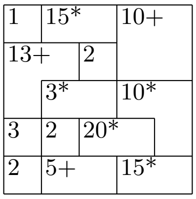
Lösung: Um die Striche passend zu verbinden geht man wie folgt vor:



Aufgabe 1.4

Bei einem NekNek trägt man ähnlich wie bei einem Sudoku Ziffern in ein Gitter ein. In jeder Zeile und Spalte kommt jede der Ziffern 1 bis 5 genau einmal vor. Zudem müssen in den umrahmten Kästen die jeweiligen Teilrechnungen erfüllt sein. Steht an einem Kasten beispielsweise 18*, so bedeutet das, dass das Produkt der Zahlen innerhalb des Kastens genau 18 ergibt. Ein 4- bedeutet also, dass die Zahlen im Kasten, auf die richtige Weise von einander abgezogen, die Zahl 4 ergeben. Steht einfach nur eine Zahl an einem Kasten, so muss diese Zahl in den Kasten.

Löse das folgende NekNek!!



Lösung:

Die Lösung für dieses NekNek lautet wie folgt: