Dr. Michael J. Winckler
Mathe–Star–Initiative
IWR, Raum 502, INF 368, 69120 Heidelberg
Michael.Winckler@iwr.uni-heidelberg.de
http://www.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/Mathe-Star/

# Mathe–Star Lösungen Runde 3 2004/05

**Allgemeine Lösungeshinweise**

Die folgenden Tipps fassen einige Punkte zusammen, die zur *vollständigen und fehlerfreien* Beantwortung von Aufgaben beachtet werden sollten.

1. Enger Bezug zum Aufgabentext

   Im Rahmen der Bearbeitung der Frage sollten nur aus den in der Aufgabe explizit genannten Hinweisen Schlüsse gezogen werden. Die Einbeziehung weiterer Annahmen in die Aufgabe ist nur insoweit gerechtfertigt, als sie sich zweifelsfrei aus den allgemeinen Bemerkungen zur Aufgabenstellung ergeben.

   Beispielsweise kann von einem *Ball* in einer Aufgabenstellung angenommen werden, dass es sich um eine perfekte Kugel handelt. Vermessungsaufgaben in freier Natur können (falls nicht explizit anders angegeben) in der Ebene (d.h. unter Vernachlässigung der Erdkrümmung) berechnet werden. Von einem *5-Liter-Gefäß* kann man aber *nicht* annehmen, dass es eine Messskala besitzt oder dass man es verwenden kann, um andere Masseinheiten als 5 Liter abzumessen.

2. Vollständigkeit der Antwort und logisches Ableiten

   Zu den in der Aufgabenstellung aufgestellten Behauptungen und Fragen muss in der Lösung Stellung bezogen werden. Aus einem Antwortsatz oder einer anderen geeigneten schriftlichen Darlegung muss klar zum Ausdruck kommen, wie die richtige Lösung zum gestellten Problem aussieht.

   Zu dieser Antwort sollte im Rahmen der Ausarbeitung der Lösung eine logische Ableitung verfasst werden. Dabei sind alle wesentlichen Gedankenschritte von der Aufgabenstellung bis zur Lösung darzustellen.

   Kann aus der Angabe der Lösung unmittelbar deren Richtigkeit festgestellt werden (z.B. bei einem Sudoku), so ist es hilfreich, eine Bemerkung zur *Eindeutigkeit* der gegebenen Lösung zuzufügen. Die Frage, ob es zu einem Problem mehrere Lösungen gibt, ist in der Mathematik von fundamentaler Bedeutung für die Bewertung einer angegebenen bzw. gefundenen Lösung.

3. Lesbarkeit und Darstellung

   Die Lösung einer Aufgabe soll es einem neutralen Beobachter ermöglichen, die Richtigkeit des Schlusses nachzuvollziehen und dabei die verwendeten Hilfsmittel kennenzulernen. In diesem Sinne ist eine Darstellung der Lösung vorzuziehen, die prägnant und übersichtlich die Lösungsidee darstellt.

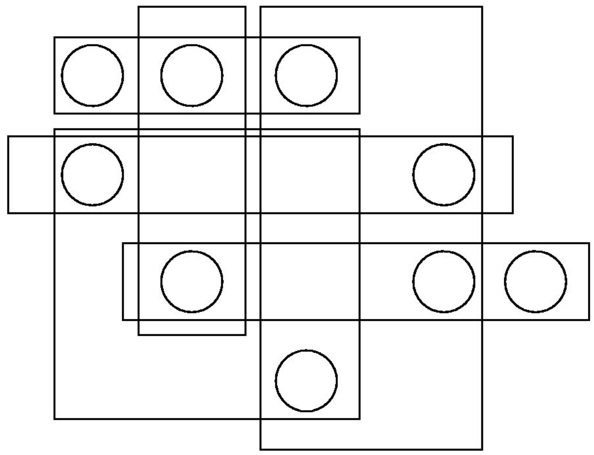
   Zeichnungen oder Diagramme können ein Hilfsmittel zur Verdeutlichung eines Lösungswegs sein. Dabei ist aber meist ein ergänzender Kommentar notwendig, um die Lösungsidee verständlich zu machen.

   Bei handschriftlichen Lösungen ist zudem eine klare und lesbare Schrift notwendig. Symbole und Kurzschriften sollten erläutert werden, wenn es sich nicht um mathematische Standard(-Schul)-Notation handelt.

## Sektion 2: Klasse 8-10

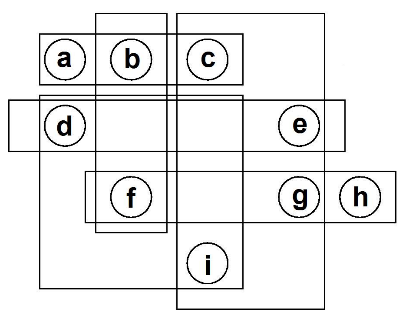
**Aufgabe 2.1**

Trage in die folgende Figur die Ziffern von 1 bis 9 je einmal in einen der Kreise ein.



Dabei ist die Summe der Zahlen in allen Rechtecken jeweils die gleiche!

**Lösung:**




Bezeichnet man die Kreise mit Buchstaben wie oben, lässt sich das Problem sauberer lösen.
Man kann folgende Gleichung aufstellen:

$b + f = d + e = a + b + c = f + g + h = d + f + i = c + e + g + i$

Daraus ergibt sich:

1. $b = g + h = d + i$
2. $e = f + i$
3. $d = c + g + i$
4. $f = a + c$
5. $a + b = e + g + i$
6. $d + f = c + e + g$
7. $h = c + 2i$

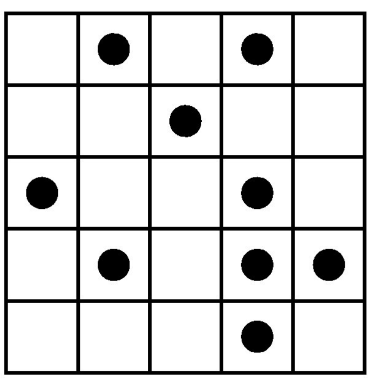
So kann man schon die Zahlenbelegung für die einzelnen Buchstaben einschränken:

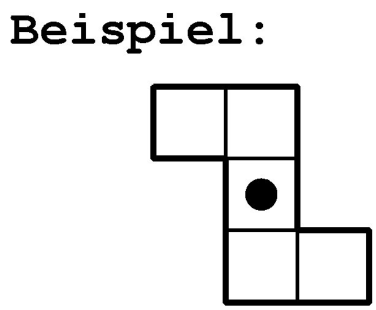
- $7 \geq a$
- $9 \geq b \geq 5$ und $b > g, h, d, i, c$
- $5 \geq c$
- $8 \geq d \geq 6$ und $d > g, c, i$
- $8 \geq e \geq 6$ und $e > f, i, c, a$
- $6 \geq f \geq 3$ und $f > c, a$
- $5 \geq g$
- $8 \geq h \geq 4$ und $h > c, i$
- $3 \geq i$

Kombiniert man nun richtig, so gelangt man zu dem Ergebnis:
$b = 9, e = 8, h = 7, d = 6, f = 5, a = 4, i = 3, g = 2, c = 1$

**Aufgabe 2.2**

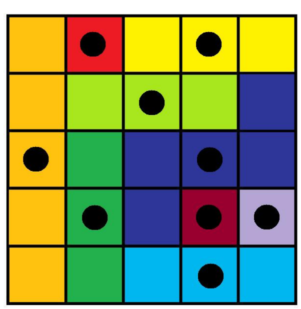
Unterteile die folgende Figur durch Striche entlang der vorgegebenen Linien in Einzelteile.





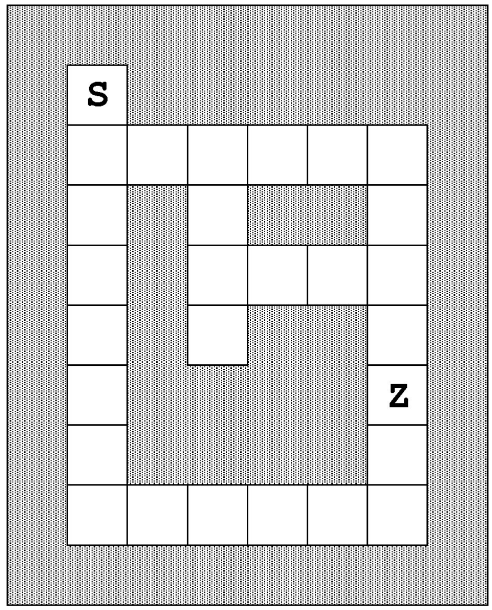

Dabei enthält jedes Einzelteil genau einen Punkt. Um diesen Punkt kann man das Einzelteil um 180 Grad drehen und es erscheint danach unverändert - es ist also drehsymmetrisch um den Mittelpunkt.

**Lösung:**



**Aufgabe 2.3**

Bei seinem Urlaub auf Kreta besuchte Professor Knobel im letzten Sommer das Museum für Minotaurenforschung. Auf einer antiken Vase fand er die Abbildung eines Labyrinthes:




Der Sage nach hat der Held Theseus, bevor er das Labyrinth des König Minus betrat, auch diese Aufgabe heroisch gemeistert:

- Beginne beim Feld **S**.
- Mache der Reihe nach Schrittfolgen der Länge 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, ... Schritte - jeweils in eine Richtung.
- Nach jeder Teiletappe kannst du die Richtung ändern - nicht jedoch während einer Schrittfolge.
- Suche so einen Weg, der mit möglichst wenigen Schritten genau auf dem Zielfeld **Z** endet.

Wieviele Schritte brauchst du für die kürzeste Lösung? Beschreibe deinen Weg nach folgendem Muster:

1 Schritt nach unten
2 Schritte nach rechts
...

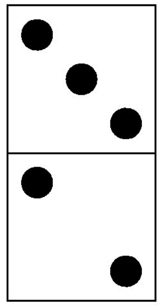
**Lösung:**

Für die kürzeste Lösung braucht man 15 Schritte:

1 Schritt nach unten
2 Schritte nach unten
3 Schritte nach unten
1 Schritt nach oben
2 Schritte nach unten
3 Schritte nach oben
1 Schritt nach oben
2 Schritte nach oben
3 Schritte nach rechts
1 Schritt nach links
2 Schritte nach unten
3 Schritte nach rechts
1 Schritt nach unten
2 Schritte nach oben
3 Schritte nach unten

**Aufgabe 2.4**

Dominosteine haben auf ihren beiden Hälften je eine Zahl von 0 bis 6. Da jede mögliche Kombination einmal vorkommt, hat ein solches Dominospiel 28 Steine. Wir entfernen den 0/0-Stein und bilden mit den restlichen Steinen Brüche, indem wir jeden Stein aufrecht hinstellen und die beiden Hälften als Zähler und Nenner ansehen:



$$= \frac{3}{2}$$

Wenn man alle 27 verbliebenen Domino-Steine so als Brüche hinlegt und dann addiert, was ist die niedrigste **ganze** Zahl die dabei als Summe entstehen kann? Beachte, dass man durch Null nicht teilen kann!

**Lösung:**

Die niedrigste Zahl entsteht, wenn man alle Steine so dreht, dass die größere Zahl unten ist, denn je größer der Nenner, desto kleiner die Zahl.
Das bedeutet, dass alle Dominosteine, die eine Null enthalten, wegfallen, denn $\frac{0}{4} = 0$.
Addieren wir nun zuerst die Brüche mit einer Sechs im Nenner, dann die mit einer Fünf usw.:

$\frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} +$
$\frac{2}{6} + \frac{2}{5} + \frac{2}{4} + \frac{2}{3} + \frac{2}{2} +$
$\frac{3}{6} + \frac{3}{5} + \frac{3}{4} + \frac{3}{3} +$
$\frac{4}{6} + \frac{4}{5} + \frac{4}{4} +$
$\frac{5}{6} + \frac{5}{5} +$
$\frac{6}{6} =$

$\frac{21}{6} + \frac{15}{5} + \frac{10}{4} + \frac{6}{3} + \frac{3}{2} + \frac{1}{1} = 13\frac{1}{2}$

Wenn man also alle 27 verbliebenen Domino-Steine so als Brüche hinlegt und dann addiert, ist die niedrigste Zahl, die dabei als Summe entsteht, die $13\frac{1}{2}$.