Dr. Michael J. Winckler
Mathe–Star–Initiative
IWR, Raum 502, INF 368, 69120 Heidelberg
Michael.Winckler@iwr.uni-heidelberg.de
http://www.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/Mathe-Star/

# Mathe–Star Lösungen Runde 3 2005/06

**Allgemeine Lösungeshinweise**

Die folgenden Tipps fassen einige Punkte zusammen, die zur *vollständigen und fehlerfreien* Beantwortung von Aufgaben beachtet werden sollten.

1. Enger Bezug zum Aufgabentext

   Im Rahmen der Bearbeitung der Frage sollten nur aus den in der Aufgabe explizit genannten Hinweisen Schlüsse gezogen werden. Die Einbeziehung weiterer Annahmen in die Aufgabe ist nur insoweit gerechtfertigt, als sie sich zweifelsfrei aus den allgemeinen Bemerkungen zur Aufgabenstellung ergeben.

   Beispielsweise kann von einem *Ball* in einer Aufgabenstellung angenommen werden, dass es sich um eine perfekte Kugel handelt. Vermessungsaufgaben in freier Natur können (falls nicht explizit anders angegeben) in der Ebene (d.h. unter Vernachlässigung der Erdkrümmung) berechnet werden. Von einem *5-Liter-Gefäß* kann man aber *nicht* annehmen, dass es eine Messskala besitzt oder dass man es verwenden kann, um andere Masseinheiten als 5 Liter abzumessen.

2. Vollständigkeit der Antwort und logisches Ableiten

   Zu den in der Aufgabenstellung aufgestellten Behauptungen und Fragen muss in der Lösung Stellung bezogen werden. Aus einem Antwortsatz oder einer anderen geeigneten schriftlichen Darlegung muss klar zum Ausdruck kommen, wie die richtige Lösung zum gestellten Problem aussieht.

   Zu dieser Antwort sollte im Rahmen der Ausarbeitung der Lösung eine logische Ableitung verfasst werden. Dabei sind alle wesentlichen Gedankenschritte von der Aufgabenstellung bis zur Lösung darzustellen.

   Kann aus der Angabe der Lösung unmittelbar deren Richtigkeit festgestellt werden (z.B. bei einem Sudoku), so ist es hilfreich, eine Bemerkung zur *Eindeutigkeit* der gegebenen Lösung zuzufügen. Die Frage, ob es zu einem Problem mehrere Lösungen gibt, ist in der Mathematik von fundamentaler Bedeutung für die Bewertung einer angegebenen bzw. gefundenen Lösung.

3. Lesbarkeit und Darstellung

   Die Lösung einer Aufgabe soll es einem neutralen Beobachter ermöglichen, die Richtigkeit des Schlusses nachzuvollziehen und dabei die verwendeten Hilfsmittel kennenzulernen. In diesem Sinne ist eine Darstellung der Lösung vorzuziehen, die prägnant und übersichtlich die Lösungsidee darstellt.

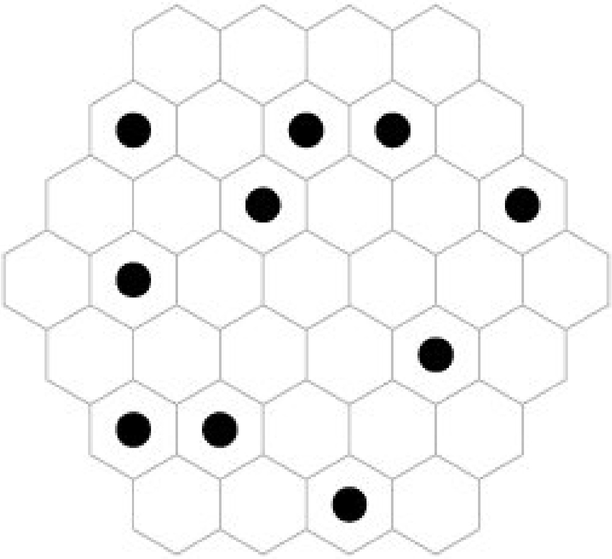
   Zeichnungen oder Diagramme können ein Hilfsmittel zur Verdeutlichung eines Lösungswegs sein. Dabei ist aber meist ein ergänzender Kommentar notwendig, um die Lösungsidee verständlich zu machen.

   Bei handschriftlichen Lösungen ist zudem eine klare und lesbare Schrift notwendig. Symbole und Kurzschriften sollten erläutert werden, wenn es sich nicht um mathematische Standard(-Schul)-Notation handelt.

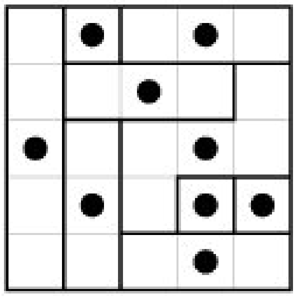
# Sektion 2: Klasse 8-10

### Aufgabe 2.1

Zerlege die folgende Figur entlang der Gitterlinien in einzelne Segmente. Dabei muss jedes Segment genau einen Punkt enthalten und um diesen Punkt herum drehsymmetrisch sein. Das kleine Bild rechts zeigt ein Beispiel mit einem quadratischen Gitter.

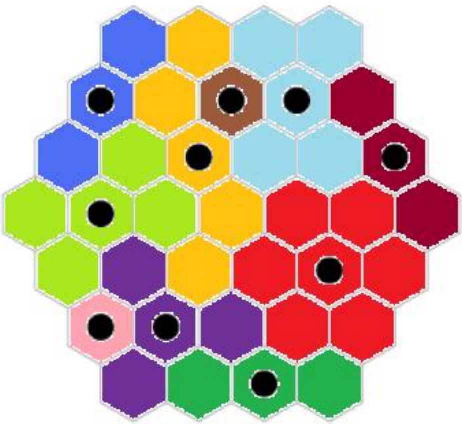


Beispiel

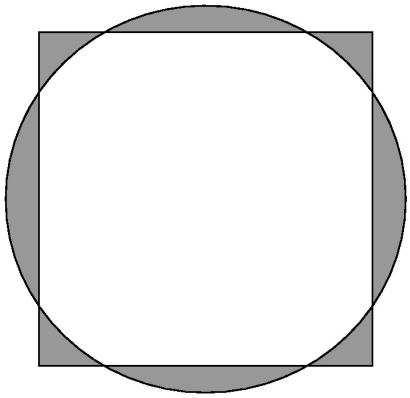


Markiere die Grenzlinien. Du kannst auch die entstehenden Segmente zur besseren Unterscheidung farblich markieren.

**Lösung:**



**Aufgabe 2.2**

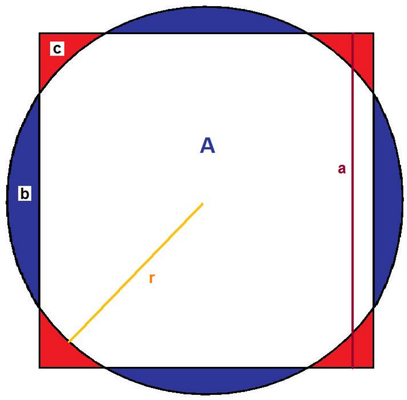


Frau Knobel hat einen Teppich entworfen, den Sie aus Stoffresten nähen will. Auf ihrer Skizze hat sie 8 Gebiete grau markiert, die beim genähten Teppich alle gleich gross sein sollen.

Kannst du den Radius des Kreises in Abhängigkeit von der Kantenlänge $a$ des Quadrats bestimmen?

**Lösung:**

Da alle grauen Gebiete gleich groß sein sollen, so gilt:
$b = c$
Sei $A$ der Flächeninhalt des Kreises. Es gilt:
$A = a^2 - 4c + 4b$
Mit $b = c$ folgt daraus:
$A = a^2$.
Da $A = \pi * r^2$ , folgt:
$\pi * r^2 = a^2$
also
$r = \frac{a}{\sqrt{\pi}}$



**Aufgabe 2.3**

Begründe, warum sich 2006 nicht als Differenz zweier natürlicher Quadratzahlen schreiben lässt.

**Lösung:**

Es muss gezeigt werden:
$a^2 - b^2 \neq 2006$ für alle $a$,$b$ aus den natürlichen Zahlen.
Es ist $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ (dritte binomische Formel)
und $2006 = 2 * 17 * 59$ (Primfaktorzerlegung).
Stellt man 2006 als Produkt zweier natürlicher Zahlen dar, so hat man dafür drei Möglichkeiten:
$2006 = 2 * 1003$ ; $2006 = 17 * 118$ ; $2006 = 34 * 59$ ;
Sei nun $a > b$.
Es müsste also eines er folgenden drei Gleichungssysteme eine Lösung für $a$ und $b$ liefern.

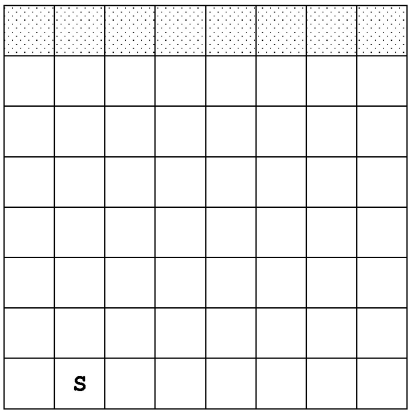
$(a-b)(a+b) = 2 * 1003$
$(a-b) = 2 \Rightarrow a = 2 + b$
$(a+b) = 1003 \Rightarrow b = 500.5$

$(a-b)(a+b) = 17 * 118$
$(a-b) = 17 \Rightarrow a = 17 + b$
$(a+b) = 118 \Rightarrow b = 50.5$

$(a-b)(a+b) = 34 * 59$
$(a-b) = 34 \Rightarrow a = 34 + b$
$(a+b) = 59 \Rightarrow b = 12.5$

Bei allen drei Lösungen ist $b$ nicht Element der natürlichen Zahlen. Somit lässt sich 2006 nicht als Differenz zweier natürlicher Quadratzahlen schreiben.

**Aufgabe 2.4**



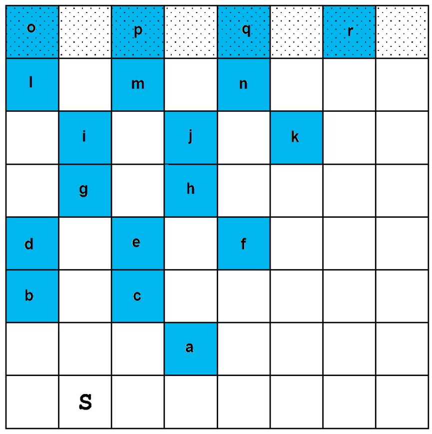

Sina Knobel kann sich beim Schachspielen nie so richtig konzentrieren. Immer wieder denkt sie mehr über Knobeleien nach, als sich der Spielstrategie zu widmen – so auch heute.

Auf dem mit "S" markierten Feld steht einer von Sinas Springern. Wievielen Zügen braucht sie *mindestens (!)*, um ihn auf die gegenüberliegende Grundlinie zu bringen? Welche Felder kann sie dabei erreichen und wieviele verschiedene Wege gibt es, um mit dieser Zugzahl auszukommen?

**Lösung:**

Sie braucht mindestens vier Züge. Begründung:
Der Springer muss sieben Zeilen nach oben springen. Da er aber in einem Zug nur höchstens zwei Zeilen nach oben kommt, so braucht er drei Züge, in denen er zwei Zeilen höher springt, und einen Zug, in dem er nur noch eine Zeile höher springt. Dabei spielt es keine Rolle in welcher Reihenfolge die Züge gemacht werden. Sina kann den einen Sprung, in dem der Spinger nur eine Zeile höher springt, gleich am Anfang machen, aber auch als zweiten, dritten oder vierten Zug.

Die blau markierten Felder können dabei erreicht werden.



Es gibt 36 verschiedene Wege, die der Springer in vier Zügen nach oben springen kann. Dies veranschaulicht das Baumdiagramm rechts. Wichtig ist nur, dass bei jedem Weg einmal nur eine Zeile hoch gesprungen wird. Dies erkennt man an der "1" auf den Kanten. Sind die Kanten nicht beschriftet, so handelt es sich um einen Sprung über zwei Zeilen.