Dr. Michael J. Winckler
Mathe–Star–Initiative
IWR, Raum 502, INF 368, 69120 Heidelberg
Michael.Winckler@iwr.uni-heidelberg.de
http://www.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/Mathe-Star/

Mathe–Star Lösungen Runde 3 2007/08

Allgemeine Lösungeshinweise

Die folgenden Tipps fassen einige Punkte zusammen, die zur *vollständigen und fehlerfreien* Beantwortung von Aufgaben beachtet werden sollten.

1. Enger Bezug zum Aufgabentext

   Im Rahmen der Bearbeitung der Frage sollten nur aus den in der Aufgabe explizit genannten Hinweisen Schlüsse gezogen werden. Die Einbeziehung weiterer Annahmen in die Aufgabe ist nur insoweit gerechtfertigt, als sie sich zweifelsfrei aus den allgemeinen Bemerkungen zur Aufgabenstellung ergeben.

   Beispielsweise kann von einem *Ball* in einer Aufgabenstellung angenommen werden, dass es sich um eine perfekte Kugel handelt. Vermessungsaufgaben in freier Natur können (falls nicht explizit anders angegeben) in der Ebene (d.h. unter Vernachlässigung der Erdkrümmung) berechnet werden. Von einem *5-Liter-Gefäß* kann man aber *nicht* annehmen, dass es eine Messskala besitzt oder dass man es verwenden kann, um andere Masseinheiten als 5 Liter abzumessen.

2. Vollständigkeit der Antwort und logisches Ableiten

   Zu den in der Aufgabenstellung aufgestellten Behauptungen und Fragen muss in der Lösung Stellung bezogen werden. Aus einem Antwortsatz oder einer anderen geeigneten schriftlichen Darlegung muss klar zum Ausdruck kommen, wie die richtige Lösung zum gestellten Problem aussieht.

   Zu dieser Antwort sollte im Rahmen der Ausarbeitung der Lösung eine logische Ableitung verfasst werden. Dabei sind alle wesentlichen Gedankenschritte von der Aufgabenstellung bis zur Lösung darzustellen.

   Kann aus der Angabe der Lösung unmittelbar deren Richtigkeit festgestellt werden (z.B. bei einem Sudoku), so ist es hilfreich, eine Bemerkung zur *Eindeutigkeit* der gegebenen Lösung zuzufügen. Die Frage, ob es zu einem Problem mehrere Lösungen gibt, ist in der Mathematik von fundamentaler Bedeutung für die Bewertung einer angegebenen bzw. gefundenen Lösung.

3. Lesbarkeit und Darstellung

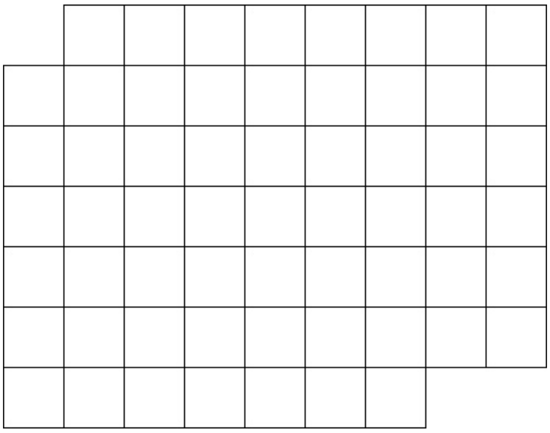
   Die Lösung einer Aufgabe soll es einem neutralen Beobachter ermöglichen, die Richtigkeit des Schlusses nachzuvollziehen und dabei die verwendeten Hilfsmittel kennenzulernen. In diesem Sinne ist eine Darstellung der Lösung vorzuziehen, die prägnant und übersichtlich die Lösungsidee darstellt.

   Zeichnungen oder Diagramme können ein Hilfsmittel zur Verdeutlichung eines Lösungswegs sein. Dabei ist aber meist ein ergänzender Kommentar notwendig, um die Lösungsidee verständlich zu machen.

   Bei handschriftlichen Lösungen ist zudem eine klare und lesbare Schrift notwendig. Symbole und Kurzschriften sollten erläutert werden, wenn es sich nicht um mathematische Standard(-Schul)-Notation handelt.

Sektion 2: Klasse 8-10

Aufgabe 2.1 Ein einschneidendes Problem



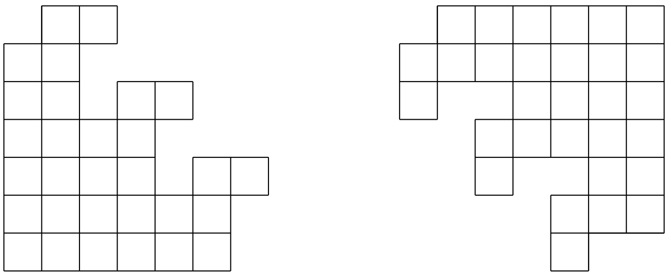
Die im Bild abgebildete Figur soll in zwei Teile zerlegt werden. Dabei sind folgende Regeln zu beachten:

- Man darf nur an den Gitterkanten entlang schneiden. Dabei sollen genau zwei Stücke entstehen.
- Die Eckkfelder rechts oben und links unten sollen zu verschiedenen Teilen gehören.
- beide Teile sollen sich deckungsgleich aufeinander legen lassen.

Finde eine solche Zerlegung oder begründe, warum es sie nicht geben kann!

Lösung:

Diese Aufgabe erscheint auf den ersten Blick vielleicht unlösbar, jedoch lässt sich nach genauem hinsehen eine Lösung finden:



Wenn man hierbei das zweite Vieleck um 90° nach rechts dreht und dann spiegelt, erhält man das linke Bild.

Aufgabe 2.2 Mathematik und Medizin

Professor Knobel leitet ein Auswertungsteam für medizinische Statistiken. Im letzten Jahr hat dieses Team eine Untersuchung über den Zusammenhang zwischen Verkehrsunfällen und Farbendblindheit gemacht. Dabei wurden folgende Daten erhoben:

- Von 1000 untersuchten Personen waren 35 farbenblind.
- Von den farbenblinden waren 80% während ihrer Fahrpraxis mindestens einmal an einem Unfall beteiligt.
- Von den nicht farbenblinden waren 60% mindestens einmal in einen Unfall verwickelt.

Um nun eine statistische Aussage machen zu können, will Herr Knobel noch eine abgeleitete Zahl berechnen: Wieviel Prozent der Unfallbeteiligten sind farbenblind?

Berechne diesen Wert und begründe dein Vorgehen!

Lösung:

Zur Lösung dieser Aufgabe muss man die erhaltenen Informationen erst einmal etwas sortieren und dann wie folgt vorgehen:

1. Insgesamt gibt es 1000 Personen, 35 davon farbenblind. Also sind 965 Personen nicht farbenblind.
2. Um nun die Prozentzahl der beiden Gruppen umzurechnen kann man einen Dreisatz benutzen.
3. Für die nicht Farbenblinden:

$$100(\text{Prozent}) = 965(\text{nicht farbenblinde Personen})$$
$$1 = 965/100$$
$$60 = 965/100 * 60 = \underline{579}$$

also waren 579 nicht farbenblinde Personen an einem Unfall beteiligt.

4. Und für die Farbenblinden:

$$100(\text{Prozent}) = 35(\text{farbenblinde Personen})$$
$$1 = 35/100$$
$$80 = 35/100 * 80 = \underline{28}$$

also waren 28 farbenblinde Personen an einem Unfall beteiligt.

5. Nun weiß man, wie viele Personen der zwei Gruppen jeweils an einem Unfall beteiligt waren. Nun ist jedoch gefragt, wieviel Prozent der Unfallbeteiligten farbeblind waren. Also muss man zunächst die Gesamtzahl der Unfallbeteiligten berechnen, also beide Gruppen zusammenzählen. Dabei erhält man 607 Personen, die an einem Unfall beteiligt waren.
6. Wieviel Prozent davon sind farbenblind?

$$607(\text{Unfallbeteiligte}) = 100(\text{Prozent})$$
$$1 = 100/607$$
$$28 = 100/607 * 28 = \underline{4{,}61 \text{ (gerundet)}}$$

Das erhaltene Ergebnis bedeutet, dass ca. 4,61 Prozent aller, die an einem Unfall beteiligt waren, farbenblind sind.

Aufgabe 2.3 Von Ziffern und Zahlen

Aus den sechs Ziffern 1,2,3,4,5 und 6 wird eine beliebige sechsstellige Zahl gebildet. Dabei kommt jede der Ziffern genau einmal vor. Kann die gebildete Zahl eine Quadratzahl sein?

Begründe deine Antwort!

Lösung:

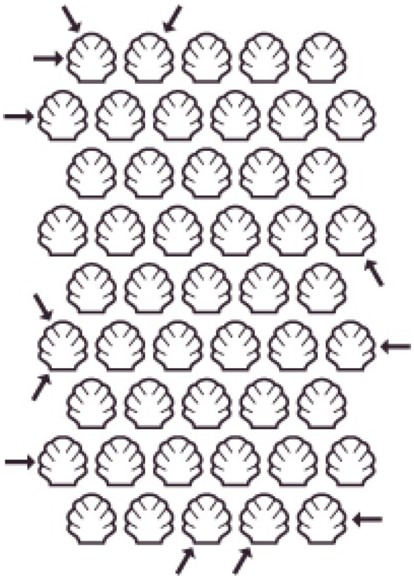
Bei dieser Aufgabe wir man sehr leicht dazu verleitet zu glauben, dass bei der enormen Menge an Zahlen, die gebildet werden können, doch mindestens eine dabei sein wird, die eine Quadratzahl ist. Allerdings wäre das ja keine Begründung. Was man hier vielmehr machen muss, ist, sich zunächst einmal die Quersumme einer auf diese Art gebildeten Zahl anzuschaun. Schnell fällt auf, dass diese immer gleich ist:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21, \text{ egal wie die Zahlen vorher angeordnet sind.}$$

Nun lässt sich erkennen, dass 21 durch 3 teilbar ist: $21 : 3 = 7$. Allerdings ist 21 nicht durch 9 teilbar, was aber gegeben sein müsste, wenn es sich um eine Quadratzahl handelt!

Begründung:
In der Primfaktorzerlegung der sechsstelligen Zahl n taucht eine 3 auf. Es ist also:
$n = 3 * ...$, wobei die 3 aber nur einmal vorkommt, sonst wäre n auch durch 9 teilbar. Wenn n eine Quadratzahl ist, dann muss $\sqrt{n}$ eine natürliche Zahl sein, aber $\sqrt{n} = \sqrt{3 * ...} = \sqrt{3} * \sqrt{...}$ und das liegt nicht in den ntürlichen Zahlen.

Aufgabe 2.4 Perlensuche



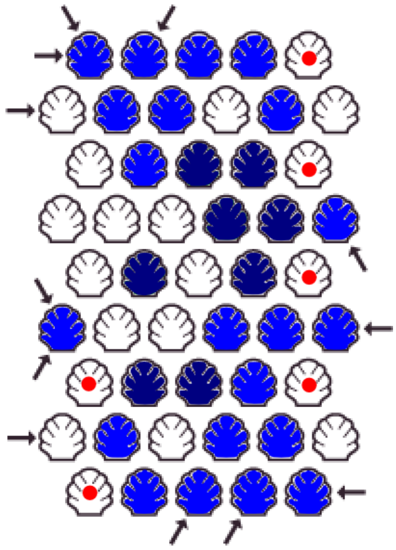
Bei dieser Aufgabe sollst du unter den Muschelschalen Perlen finden. Dabei helfen dir folgende Hinweise:

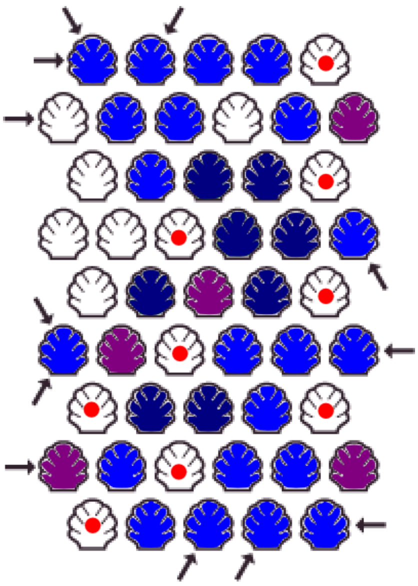
- Jeder Pfeil zeigt auf genau eine Perle.
- Auf jede Perle zeigt genau ein Pfeil.
- Nie sind zwei Perlen unter nebeneinanderliegenden Muscheln (waagerecht oder diagonal).

Zeichne die Lage der Perlen ein!

Lösung:

Zur Lösung der Aufgabe streicht man zuerst alle Muscheln, von denen man weiß, dass sie keine Perle beinhalten. Das ist der Fall, wenn entweder kein Pfeil (dunkelblau) oder mehr als ein Pfeil (blau) auf die Muschel zeigt. Sechs Perlen lassen sich dann schon eindeutig zuordnen.





Jetzt kann man die Muscheln streichen (lila), unter denen keine Perle sein kann, da sonst zwei Perlen nebeneinander wäre. Dadurch ergeben sich die Positionen von zwei weiteren Perlen. Anschließend kann man wieder eine Muschel lila färben und noch eine Perle finden.

So fährt man fort ... Muschel lila markieren, Perle finden ... und man erhält die Lösung: