Dr. Michael J. Winckler
Mathe–Star–Initiative
IWR, Raum 502, INF 368, 69120 Heidelberg
Michael.Winckler@iwr.uni-heidelberg.de
http://www.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/Mathe-Star/

Mathe–Star Lösungen Runde 3 2008/09

Allgemeine Lösungeshinweise

Die folgenden Tipps fassen einige Punkte zusammen, die zur *vollständigen und fehlerfreien* Beantwortung von Aufgaben beachtet werden sollten.

1. Enger Bezug zum Aufgabentext

   Im Rahmen der Bearbeitung der Frage sollten nur aus den in der Aufgabe explizit genannten Hinweisen Schlüsse gezogen werden. Die Einbeziehung weiterer Annahmen in die Aufgabe ist nur insoweit gerechtfertigt, als sie sich zweifelsfrei aus den allgemeinen Bemerkungen zur Aufgabenstellung ergeben.

   Beispielsweise kann von einem *Ball* in einer Aufgabenstellung angenommen werden, dass es sich um eine perfekte Kugel handelt. Vermessungsaufgaben in freier Natur können (falls nicht explizit anders angegeben) in der Ebene (d.h. unter Vernachlässigung der Erdkrümmung) berechnet werden. Von einem *5-Liter-Gefäß* kann man aber *nicht* annehmen, dass es eine Messskala besitzt oder dass man es verwenden kann, um andere Masseinheiten als 5 Liter abzumessen.

2. Vollständigkeit der Antwort und logisches Ableiten

   Zu den in der Aufgabenstellung aufgestellten Behauptungen und Fragen muss in der Lösung Stellung bezogen werden. Aus einem Antwortsatz oder einer anderen geeigneten schriftlichen Darlegung muss klar zum Ausdruck kommen, wie die richtige Lösung zum gestellten Problem aussieht.

   Zu dieser Antwort sollte im Rahmen der Ausarbeitung der Lösung eine logische Ableitung verfasst werden. Dabei sind alle wesentlichen Gedankenschritte von der Aufgabenstellung bis zur Lösung darzustellen.

   Kann aus der Angabe der Lösung unmittelbar deren Richtigkeit festgestellt werden (z.B. bei einem Sudoku), so ist es hilfreich, eine Bemerkung zur *Eindeutigkeit* der gegebenen Lösung zuzufügen. Die Frage, ob es zu einem Problem mehrere Lösungen gibt, ist in der Mathematik von fundamentaler Bedeutung für die Bewertung einer angegebenen bzw. gefundenen Lösung.

3. Lesbarkeit und Darstellung

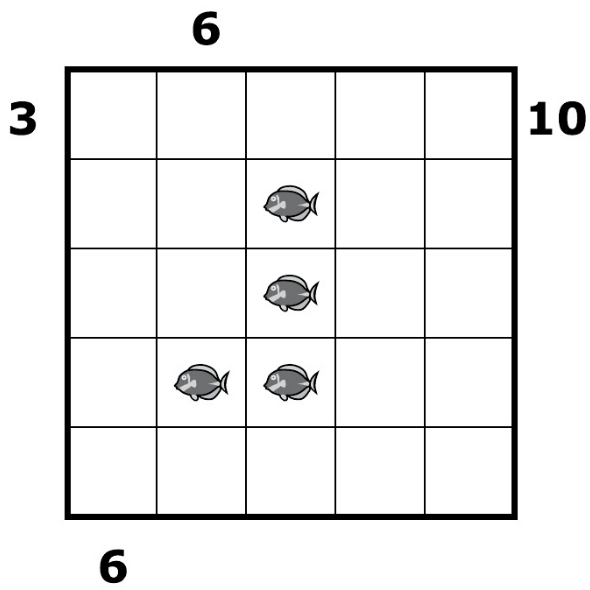
   Die Lösung einer Aufgabe soll es einem neutralen Beobachter ermöglichen, die Richtigkeit des Schlusses nachzuvollziehen und dabei die verwendeten Hilfsmittel kennenzulernen. In diesem Sinne ist eine Darstellung der Lösung vorzuziehen, die prägnant und übersichtlich die Lösungsidee darstellt.

   Zeichnungen oder Diagramme können ein Hilfsmittel zur Verdeutlichung eines Lösungswegs sein. Dabei ist aber meist ein ergänzender Kommentar notwendig, um die Lösungsidee verständlich zu machen.

   Bei handschriftlichen Lösungen ist zudem eine klare und lesbare Schrift notwendig. Symbole und Kurzschriften sollten erläutert werden, wenn es sich nicht um mathematische Standard(-Schul)-Notation handelt.

Sektion 2: Klasse 8-10

Aufgabe 2.1 Fisch am Haken



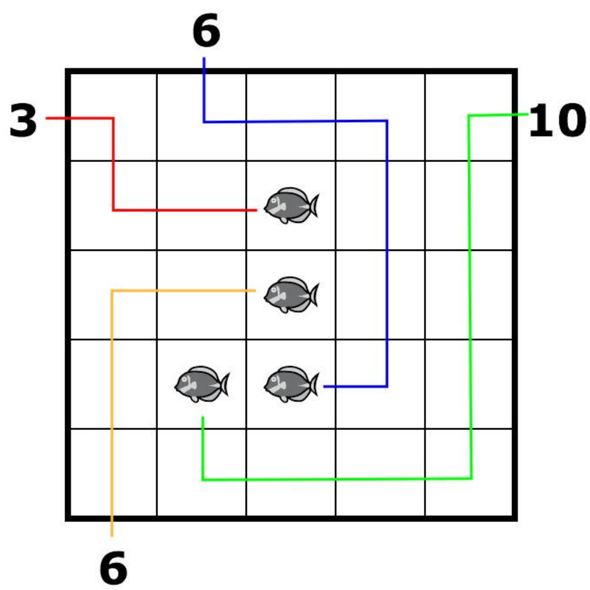
Die vier Zahlen repräsentieren die Positionen von vier Anglern. Jeder Angler hat einen Fisch am Haken. Dabei bedecken die Angelschnüre das gesamte Gitter, ohne sich zu kreuzen: Durch jede Gitterzelle führt eine Angelschnur, die dort entweder geradeaus weitergeht, oder rechtwinklig abknickt.

Die Zahlen repräsentieren die Längen der Angelschnüre (in Kästchenzahlen inklusive dem Fischkästchen). Allerdings flunkern Angler gerne ein wenig, weswegen die Zahlen alle entweder um 1 zu gross oder zu klein sind.

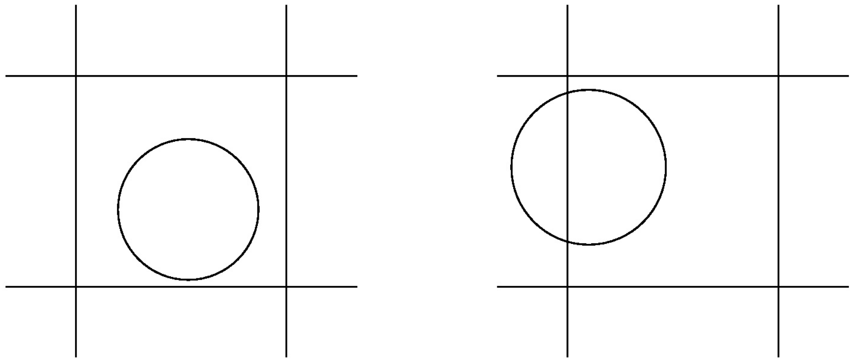
Kannst du herausfinden, wer welchen Fisch an der Angel hat?

Lösung:

Die Lösung dieser Aufgabe war bei fast allen uns eingesandten Lösungen richtig.



Aufgabe 2.2 Schach dem Euro



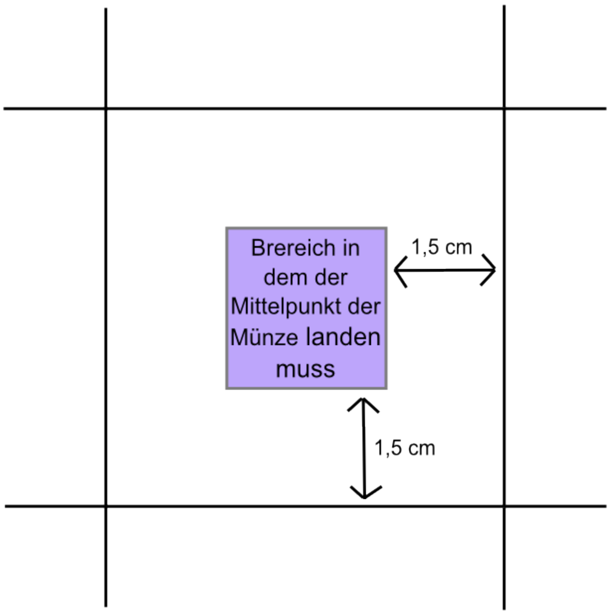
gewonnen verloren

Kevin findet auf einem Jahrmarkt einen Geschicklichkeitswettbewerb. Dabei sollen die Teilnehmer eine 2-Euro-Münze (Durchmesser 3cm) auf ein Karotuch mit Kästchenlänge 5cm werfen. Bleibt die Münze *ganz innerhalb* eines Karos liegen, so gewinnt der Spieler - ansonsten hat er verloren.

Wenn man eine Münze auf das Tuch wirft, ohne genauer zu zielen und die Münze nicht danebenfällt, wie gross ist dann die Wahrscheinlichkeit, zu gewinnen (in Prozent)?

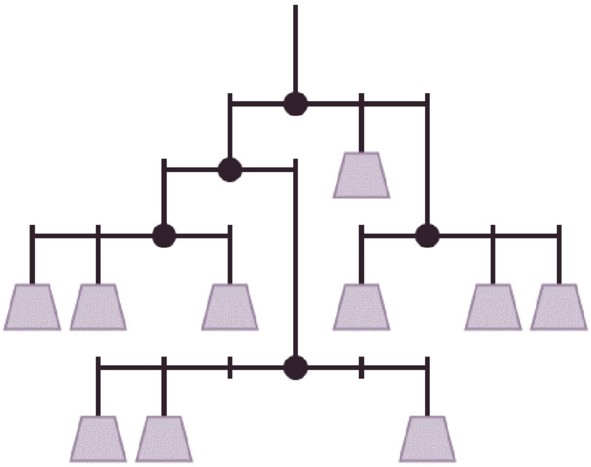
Lösung:

Um zu gewinnen, muss die Münze ganz innerhalb des Karos liegen. Anders ausgedrückt: Der Mittelpunkt der Münze muss mindestens 1,5 cm vom Rand es Karos entfernt liegen, da der Durchmesser der Münze 3 cm beträgt.



Das gesamte Kästchen hat eine Fläche von 5 cm $*$ 5 cm $= 25$ cm^2. Der mittere Bereich hat eine Fläche von $(5-(2*1,5)=2)$ 2 cm $*$ 2 cm $= 4$ cm^2.
Es ist $4/25 = 0.16$. Also nimmt die bunte Fläche nur 16 Prozent der Gesamtfläche ein, womit die Gewinnwahrscheinlichkeit bei 16 Prozent beträgt.

Aufgabe 2.3 Alles im Lot

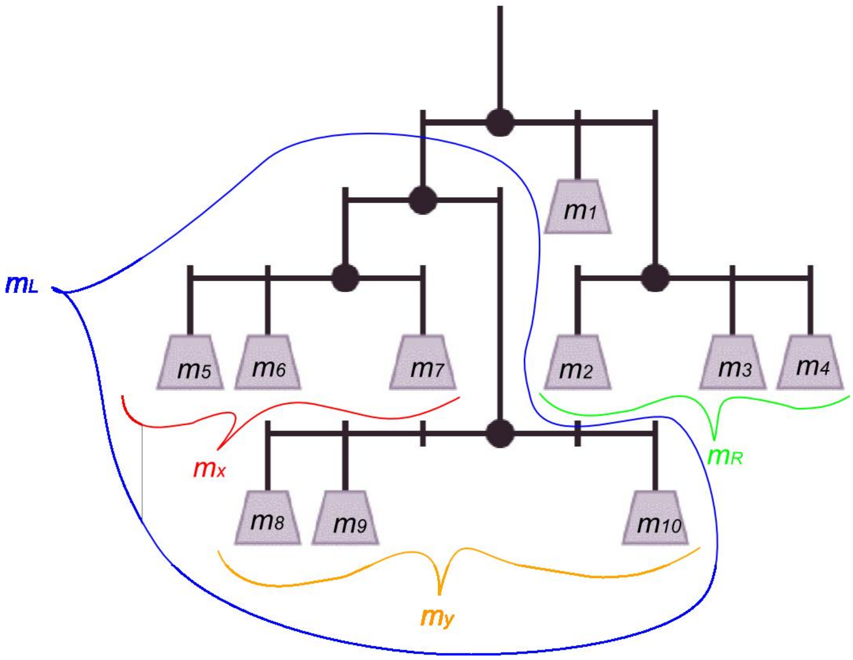


Bei diesem Mobile fehlen bei den Gewichten die Gewichtsangaben: Jedes ganzzahlige Gewicht von 1 bis 10 Gramm ist genau einmal vertreten. Die Stangen selbst nehmen wir als gewichtslos an.

Kannst du herausfinden, wo welches Gewicht hängt?

Lösung:

Um die Aufgabe zu lösen, muss beachtet werden, dass hier die Hebelwirkung eine Rolle spielt. Ein Gewicht, das weiter vom Gelenk entfernt hängt, zieht stärker nach unten als ein Gewicht, das näher am Gelenk hängt (zB.: $m_2 = m_3 + 2m_4$). Bezeichnen wir die Gewichte wie folgt:



a) Als erstes werden wir für die Beziehungen zwischen den Gewichten aus dem Mobile Gleichungen aufstellen:

1. $\sum_{i=1}^{10} m_i = 55$
2. $m_L = m_1 + 2m_R$
3. $m_2 = m_3 + 2m_4$
4. $m_7 = m_6 + 2m_5$
5. $2m_{10} = 2m_9 + 3m_8$ bzw. $m_{10} = m_9 + \frac{3}{2}m_8$
6. $m_x = m_y$
7. $m_R < m_x$ (da $m_R + \frac{m_1}{2} = m_x = m_y$)
8. $m_L = m_x + m_y$
9. $m_R = m_2 + m_3 + m_4$
10. $m_x = m_5 + m_6 + m_7$
11. $m_y = m_8 + m_9 + m_{10}$

b) Aus 2., 8. und 6. folgt

$m_L = m_1 + 2m_R$
$\Leftrightarrow m_x + m_y = m_1 + 2m_R$
$\Leftrightarrow 2m_x = m_1 + 2m_R$
$\Leftrightarrow m_x = \frac{m_1}{2} + m_R$ $(*)$

$\Rightarrow m_1$ ist gerade.

c) Man beachte 1.:
$\sum_{i=1}^{10} m_i = 55 \Leftrightarrow \sum_{i=2}^{10} m_i = 55 - m_1 = m_R + m_L + m_1 - m_1 = m_R + m_L = m_R + m_x + m_y = m_R + 2m_x$

Außerdem gilt $(*)$: $m_x = \frac{m_1}{2} + m_R$

Fallunterscheidung:

1. $m_1 = 2 \Rightarrow m_x = 1 + m_R \Rightarrow 53 = m_R + 2(1 + m_R) \Rightarrow m_R = \frac{51}{3} = 17$
2. $m_1 = 4 \Rightarrow m_x = 2 + m_R \Rightarrow 51 = m_R + 2(2 + m_R) \Rightarrow m_R = \frac{47}{3}$
3. $m_1 = 6 \Rightarrow m_x = 3 + m_R \Rightarrow 49 = m_R + 2(3 + m_R) \Rightarrow m_R = \frac{43}{3}$
4. $m_1 = 8 \Rightarrow m_x = 4 + m_R \Rightarrow 47 = m_R + 2(4 + m_R) \Rightarrow m_R = \frac{39}{3} = 13$
5. $m_1 = 10 \Rightarrow m_x = 5 + m_R \Rightarrow 45 = m_R + 2(5 + m_R) \Rightarrow m_R = \frac{35}{3}$

Da m_R ein natürliche Zahl sein muss, so kommen nur $m_1 = 2$ und $m_1 = 8$ in Frage.

d) Aus 2. und der Fallunterscheidung folgt:

Entweder gilt: Fall 1
$m_L = m_1 + 2m_R \Leftrightarrow m_L = 2 + 34 \Leftrightarrow m_L = 36 \Leftrightarrow m_x = m_y = 18$

Oder es gilt: Fall 2
$m_L = m_1 + 2m_R \Leftrightarrow m_L = 8 + 26 \Leftrightarrow m_L = 34 \Leftrightarrow m_x = m_y = 17$

Fall 1:
e$_1$) Aus 3., 9. und d) folgt mit
$m_2 = m_3 + 2m_4$ und $m_2 = 17 - m_3 - m_4$:
$m_3 + 2m_4 = 17 - m_3 - m_4$
$\Rightarrow m_3 = \frac{17-3m_4}{2}$ wobei m_3 Element der natürlichen Zahlen sein muss.
D.h. m_4 ist entweder 1,3 oder 5.
Für $m_4 = 1$ ist das Tripel $(m_2, m_3, m_4) = (9, 7, 1)$.
Für $m_4 = 3$ erhält man $(10, 4, 3)$, und für $m_4 = 5$ $(11, 1, 5)$, wobei letztes offensichtlich nicht möglich ist.

f$_1$) Aus 4. und d) folgt mit
$m_7 = m_6 + 2m_5$ und $m_7 = 18 - m_5 - m_6$:
$m_6 + 2m_5 = 18 - m_5 - m_6$
$\Rightarrow m_6 = \frac{18-3m_5}{2}$ wobei m_6 Element der natürlichen Zahlen sein muss.
D.h. m_5 ist entweder 2 oder 4.
Da aber $m_1 = 2$ gilt, ist $m_5 = 4$. Und daraus folgt $(m_5, m_6, m_7) = (4, 3, 11)$, was nicht möglich ist.
$\Rightarrow$ Fall 1 führt zu keinem Ergebnis.

Fall 2:
e$_2$) Aus 3., 9. und d) folgt mit
$m_2 = m_3 + 2m_4$ und $m_2 = 13 - m_3 - m_4$:
$m_3 + 2m_4 = 13 - m_3 - m_4$
$\Rightarrow m_3 = \frac{13-3m_4}{2}$ wobei m_3 Element der natürlichen Zahlen sein muss.
D.h. m_4 ist entweder 1 oder 3.
Für $m_4 = 1$ ist das Tripel $(m_2, m_3, m_4) = (7, 5, 1)$.
Für $m_4 = 3$ erhält man $(8, 2, 3)$.
Da allerdings schon $m_1 = 8$ gilt, ist $m_4 = 1$, $m_3 = 5$ und $m_2 = 7$

f$_2$) Aus 4. und d) folgt mit
$m_7 = m_6 + 2m_5$ und $m_7 = 17 - m_5 - m_6$:
$m_6 + 2m_5 = 17 - m_5 - m_6$
$\Rightarrow m_6 = \frac{17-3m_5}{2}$ wobei m_6 Element der natürlichen Zahlen sein muss.
D.h. $m_5 = 3$, denn es ist schon $m_4 = 1$ und $m_3 = 5$.
Daraus folgt $m_5 = 3$, $m_6 = 4$ und $m_7 = 10$.

g) Auf 5. und d) folgt nun eindeutigerweise:
$m_8 = 2$, $m_9 = 6$ und $m_{10} = 9$.

Es wurde bewiesen, dass nur eine einzige Lösung existiert, und zwar:

$(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, m_9, m_{10}) = (8, 7, 5, 1, 3, 4, 10, 2, 6, 9)$.

Aufgabe 2.4 Mit oder ohne 1?

Man betrachte alle natürlichen Zahlen von 1 bis 1.000.000 (einschliesslich). Gibt es in diesem Intervall mehr Zahlen, die die Ziffer 1 enthalten oder mehr Zahlen die die Ziffer 1 nicht enthalten? Gib zur Lösung an, wieviel Prozent der Zahlen die Ziffer 1 enthalten!

Lösung:

Für die Lösung dieser Aufgabe gab es zwei Möglichkeiten.

Die **erste Lösungsmöglichkeit** bestand darin, sich schrittweise zu überlegen, wie viele der Zahlen 1 bis 1.000.000 mindestes einmal die Ziffer 1 einhalten. Dabei sind aber sehr häufig Rechen- bzw. Denkfehler aufgetreten.

Hier die richtige Lösung:
Es wird jeweils angegeben, wie viele Zahlen in den bestimmten Intervallen die 1 enthalten:
1 bis 99: 19
100 bis 199: 100
200 bis 99: $19 * 8 = 152$ (Hier gilt das Gleiche wie für 1 bis 99)
1000 bis 1999: 1000 2000 bis 9999: $271 * 8 = 2168$ (Hier gilt das Gleiche wie für 1 bis 999)
10.000 bis 19.999: 10.000
20.000 bis 99.999: $3439 * 8 = 27512$ 100.000 bis 199.999: 100.000
200.000 bis 999.999: $40951 * 8 = 327608$
1.000.000: 1

Es gibt also $19 + 100 + 152 + 1000 + 2168 + 10.000 + 27512 + 100.000 + 327.608 + 1 = 468560$ Zahlen zwischen 1 und 1.000.000, die die Ziffer 1 enthalten.

Das sind $\frac{468560}{1000000} = 0.468560 \approx 46,86$ Prozent. Also gibt in diesem Intervall mehr Zahlen, die die 1 nicht enthalten.

Die **zweite Lösungsmöglichkeit** ist wesentlich einfacher und schneller.
Der Einfachheit halber füllen wir bei den Zahlen kleiner als 1.000.000 die Stellen links mit Nullen auf (also 10=0.000.010). An der ersten Stelle hat nur die 1.000.000 eine 1. Also haben 999.999 Zahlen an dieser Stelle keine 1.
Bei jeder weiteren der sechs Stellen gibt es jeweils zehn Möglichkeiten (0-9), also hat immer nur ein Zehntel der Zahlen eine 1 an der entsprechenden Stelle.
Insgesamt haben also $\frac{999.999*(\frac{9}{10})^6}{1.000.000} \approx 53,14$ Prozent der Zahlen keine 1.