Dr. Michael J. Winckler
Mathe–Star–Initiative
IWR, Raum 502, INF 368, 69120 Heidelberg
Michael.Winckler@iwr.uni-heidelberg.de
http://www.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/Mathe-Star/

Mathe–Star Lösungen Runde 3 2004/05

Allgemeine Lösungeshinweise

Die folgenden Tipps fassen einige Punkte zusammen, die zur *vollständigen und fehlerfreien* Beantwortung von Aufgaben beachtet werden sollten.

1. Enger Bezug zum Aufgabentext

   Im Rahmen der Bearbeitung der Frage sollten nur aus den in der Aufgabe explizit genannten Hinweisen Schlüsse gezogen werden. Die Einbeziehung weiterer Annahmen in die Aufgabe ist nur insoweit gerechtfertigt, als sie sich zweifelsfrei aus den allgemeinen Bemerkungen zur Aufgabenstellung ergeben.

   Beispielsweise kann von einem *Ball* in einer Aufgabenstellung angenommen werden, dass es sich um eine perfekte Kugel handelt. Vermessungsaufgaben in freier Natur können (falls nicht explizit anders angegeben) in der Ebene (d.h. unter Vernachlässigung der Erdkrümmung) berechnet werden. Von einem *5-Liter-Gefäß* kann man aber *nicht* annehmen, dass es eine Messskala besitzt oder dass man es verwenden kann, um andere Masseinheiten als 5 Liter abzumessen.

2. Vollständigkeit der Antwort und logisches Ableiten

   Zu den in der Aufgabenstellung aufgestellten Behauptungen und Fragen muss in der Lösung Stellung bezogen werden. Aus einem Antwortsatz oder einer anderen geeigneten schriftlichen Darlegung muss klar zum Ausdruck kommen, wie die richtige Lösung zum gestellten Problem aussieht.

   Zu dieser Antwort sollte im Rahmen der Ausarbeitung der Lösung eine logische Ableitung verfasst werden. Dabei sind alle wesentlichen Gedankenschritte von der Aufgabenstellung bis zur Lösung darzustellen.

   Kann aus der Angabe der Lösung unmittelbar deren Richtigkeit festgestellt werden (z.B. bei einem Sudoku), so ist es hilfreich, eine Bemerkung zur *Eindeutigkeit* der gegebenen Lösung zuzufügen. Die Frage, ob es zu einem Problem mehrere Lösungen gibt, ist in der Mathematik von fundamentaler Bedeutung für die Bewertung einer angegebenen bzw. gefundenen Lösung.

3. Lesbarkeit und Darstellung

   Die Lösung einer Aufgabe soll es einem neutralen Beobachter ermöglichen, die Richtigkeit des Schlusses nachzuvollziehen und dabei die verwendeten Hilfsmittel kennenzulernen. In diesem Sinne ist eine Darstellung der Lösung vorzuziehen, die prägnant und übersichtlich die Lösungsidee darstellt.

   Zeichnungen oder Diagramme können ein Hilfsmittel zur Verdeutlichung eines Lösungswegs sein. Dabei ist aber meist ein ergänzender Kommentar notwendig, um die Lösungsidee verständlich zu machen.

   Bei handschriftlichen Lösungen ist zudem eine klare und lesbare Schrift notwendig. Symbole und Kurzschriften sollten erläutert werden, wenn es sich nicht um mathematische Standard(-Schul)-Notation handelt.

Sektion 3: Klasse 11-13

Aufgabe 3.1

Das folgende Quadrat ist in jeder Zeile und Spalte je 1x mit den Buchstaben A, B, C, D und E zu belegen. Dabei bleibt jeweils ein Feld frei.

		A	C			A	
							B
C							
B							
E							B
			E	C	B		

Die Hinweise am Rand geben an, welchen Buchstaben man von der jeweiligen Seite aus in der Reihe bzw. Spalte als ersten sehen kann. Da es aber leere Felder gibt, muss dieser Buchstabe in der jeweiligen Reihe oder Spalte nicht in der in Blickrichtung ersten Zeile stehen!

Lösung:

		A	C			A	
	D		C	B	E	A	
		A	D	E	C	B	B
C	C	D	B		A	E	
B	B	E		A	D	C	
E	E	C	A	D	B		B
	A	B	E	C		D	
			E	C	B		

Aufgabe 3.2

Mit $S(n)$ bezeichnen wir die Ziffernsumme der Zahl n. Beispielsweise ist also

$$S(65273) = 6 + 5 + 2 + 7 + 3 = 23.$$

Finde die kleinste Zahl n, für die $S(n)$ und $S(n + 1)$ beide durch 17 teilbar sind.

Lösung:

Vorüberlegung: Wenn man eine beliebige Zahl n (zB. 21) nimmt und die Ziffernsumme mit der Ziffernsumme des Nachfolgers (22) vergleicht, so bekommt man meistens einen Unterschied von nur 1 $(2 + 1 = 3, 2 + 2 = 4)$. Wenn bei so einer Zahl jetzt $S(n)$ durch 17 teilbar war, dann ist $S(n + 1)$ nicht durch 17 teilbar.
Wir brauchen also zwei Zahlen n und $n + 1$, bei denen sich die Ziffernsumme um 17 oder ein Vielfaches von 17 unterscheidet. Dies erhält man nur, wenn zwischen n und $n + 1$ ein Überschlag stattfindet.
Z.B.: $99 : S(99) = 9 + 9 = 18, S(100) = 1 + 0 + 0 = 1; 18 - 1 = 17$
Bei 9 und 10, 19 und 20, 29 und 30 (39 und 40, usw) erhält man keine Differenz, die durch 17 teilbar ist.

Also ist "von 99 auf 100" die kleinste Möglichkeit eine 17er Differenz zu erhalten.
Da S(99) nicht durch 17 teilbar ist, braucht man eine größere Zahl mit einem "99 auf 100"- Überschlag.

$9 + 9 = 18$. Es fehlen der Ziffernsumme also noch 16 um auf 34 zu kommen, was durch 17 teilbar ist. 16 ist mit möglichst wenigen Zahlen darstellbar als $8 + 8$ und $7 + 9$. Es sind also $S(8899)$ und $S(7999)$ durch 17 teilbar.

Für $S(7999) = 34$ gilt aber: $S(7999 + 1) = S(8000) = 8$ und 8 ist nicht durch 17 teilbar (Problem: 1000er-Überschlag).

Bleibt noch $S(8899) = 34$ und $S(8899 + 1) = S(8900) = 17$.

Somit ist $n = 8899$ die kleinste Zahl, für die $S(n)$ und $S(n + 1)$ beide durch 17 teilbar sind.

Aufgabe 3.3

Finde die kleinste positive ganze Zahl mit folgenden Eigenschaften:

1. Die vorderste Ziffer der Zahl ist eine 1.
2. Nimmt man die vorderste Ziffer weg und hängt sie hinten an die Zahl an, so ist die enstehende Zahl dreimal so gross.

Beispiel: Startet man mit 139, so erhält man 391, was die zweite Bedingung nicht erfüllt, denn $3 * 139 = 417 \neq 391$.

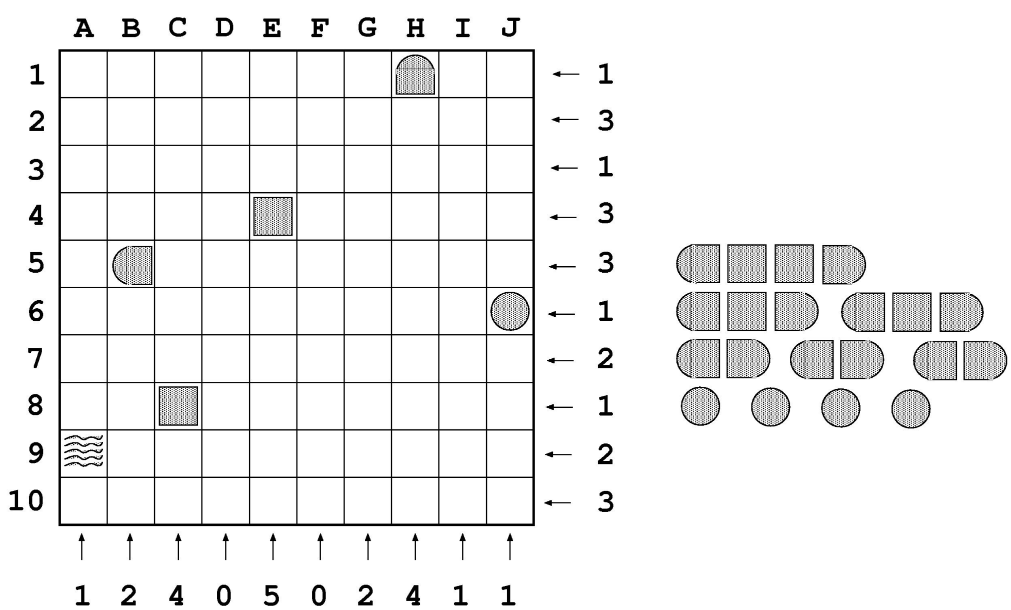
Lösung:

Da die erste Ziffer der gesuchten Zahl x eine 1 ist, so ist automatisch die letzte Ziffer er 3mal so großen Zahl y eine 1. Man sucht nun eine Ziffer, die verdreifacht 1 ergibt (Einerstelle). Hier findet man nur die 7 ($3 * 7 = 21$). Also ist die letzte Ziffer von x und gleichzeitig vorletzte Ziffer von y eine 7. Nun sucht man eine Ziffer die verdreifacht 7 ergibt, wobei der Überschlag von $3 * 7 = 21$, also 2, nicht vergessen werden darf. Also suchen wir eigentlich eine Ziffer die verdreifacht 5 ergibt. Hier kommt nur die 5 in Frage ($3 + 5 = 15$), mit Überschlag 1. Im nächsten Schritt suchen wir dann eine Ziffer, die verdreifacht $5 - 1 = 4$ ergibt, also die 8 ($3 * 8 = 24$, Überschlag 2). Eine Ziffer die verdreifacht $8 - 2 = 6$ ergibt, ist die 2 (ohne Überschlag). Eine Ziffer, die verdreifacht 2 ergibt, ist die 4 (Überschlag 1), und eine Ziffer, die verdreifacht $4 - 1 = 3$ ergibt, ist die 1, wobei wir bei der vordersten Ziffer angekommen wären.

Die gesuchte Zahl ist somit: 142857.
Multipliziert man diese mit 3, so erhält man: 428571.

Aufgabe 3.4

Schiffe versenken hat Professor Knobel natürlich auch als Schüler *in den Pausen* gerne gespielt. Nach vielen Jahren fällt ihm ein alter Zettel mit einem nicht fertig gespielten Spiel in die Hände



Die Regeln waren, dass kein Schiff ein anderes berühren darf - auch nicht Eck über Eck diagonal. Vor dem Spiel teilte zudem jeder Spieler die Anzahl der belegten Felder in jeder Zeile und Spalte seinem Gegner mit. Treffer wurden jeweils genau spezifiziert (Rumpftreffer, Treffer westl. Ende etc., siehe Skizze).

Nach einigem Nachdenken wusste er, warum das Spiel nicht fertig gespielt wurde: Er konnte die Lage aller Schiffe allein aus seinen Aufzeichnungen rekonstruieren.

Lösung: