Dr. Michael J. Winckler
Mathe–Star–Initiative
IWR, Raum 502, INF 368, 69120 Heidelberg
Michael.Winckler@iwr.uni-heidelberg.de
http://www.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/Mathe-Star/

Mathe–Star Lösungen Runde 3 2006/07

Sektion 3: Klasse 11-13

Aufgabe 3.1

Kann man die zwölf Kanten eines Würfels so mit den Zahlen 1-12 kennzeichnen, dass jede Zahl genau einmal verwendet wird und die Summe der drei Kanten die sich in einer Ecke treffen für alle acht Ecken gleich ist?

Lösung 3.1

Dies ist nicht möglich, denn:
Jede Kante verbindet zwei Ecken miteinander und zählt somit auch an zwei Ecken mit in die Summe an den Ecken hinein. Addiert man die einzelnen Summen an den acht Ecken so erhält man

$$2 * (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12) = 2 * \sum_{i=1}^{12} i = 2 * 78 = 156$$

Will man, dass die Summe an allen Ecken gleich ist, so muss gelten:

Summe an einer Ecke $= 156/8$.

Da 156 aber nicht durch 8 teilbar ist, so gibt es keine Lösung für das Problem.

Aufgabe 3.2

Selbst auf der Rennbahn kann Professor Knobel das Knobeln nicht lassen. Dabei fasziniert ihn die Tatsache, dass manche Rennen als “tote Rennen” enden: Zwei Pferde werden auf den gleichen Platz gewertet, weil nicht zu entscheiden ist, welches von den beiden eher durch Ziel lief.

Wenn wir annehmen, dass es sogar zwischen mehreren Pferden ein Unentschieden geben kann, wieviele verschiedene Resultate eines Rennens sind bei den vier Pferden Archais, Bester, Cleverboy und Donnerhall möglich.

Lösung 3.2

Es sind 75 verschiedene Resultate möglich. Erklärung:

1. Alle Pferde belegen den ersten Platz: Hier gibt es nur eine Möglichkeit.

2. Es werden nur die ersten beiden Plätze belegt. Hier gibt es 14 Möglichkeiten:

   - Der erste Platz wird dreimal belegt, der zweite nur einmal:

A	B	C	D
1	1	1	2
1	1	2	1
1	2	1	1
2	1	1	1

   - Der erste und zweite Platz werden beide zweimal belegt:

A	B	C	D
1	1	2	2
1	2	1	2
1	2	2	1
2	1	1	2
2	1	2	1
2	2	1	1

   - Der erste Platz wird einmal und zweite Platz dreimal belegt:

A	B	C	D
1	2	2	2
2	1	2	2
2	2	1	2
2	2	2	1

3. Es werden die ersten drei Plätze belegt. Hier gibt es 36 Möglichkeiten:

   - Der erste Platz wird zweimal belegt, der zweite und dritte Platz jeweils einmal:

A	B	C	D
1	1	2	3
1	1	3	2
1	2	1	3
1	2	3	1
1	3	1	2
1	3	2	1
2	1	1	3
2	1	3	1
2	3	1	1
3	1	1	2
3	1	2	1
3	2	1	1

- Der zweite Platz wird zweimal belegt, der erste und dritte Platz jeweils einmal: Analog zu oben, also auch 12 Möglichkeiten.
- Der dritte Platz wird zweimal belegt, der erste und zweite Platz jeweils einmal: Analog zu oben, also auch 12 Möglichkeiten.

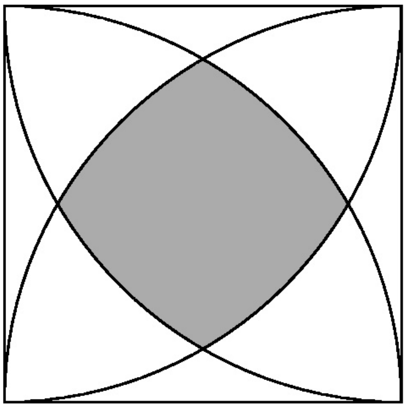
4. Alle Plätze werden belegt. Hier gibt es 24 Möglichkeiten:
Es gibt 6 Kombinationen, in denen A Platz 1 erhält:

A	B	C	D
1	2	3	4
1	2	4	3
1	3	2	4
1	3	4	2
1	4	2	3
1	4	3	2

Genauso gibt es auch jeweils 6 verschiedene Resultate, bei denen die anderen Pferde auf Platz 1 landen. Also gibt es ingesamt $4 * 6 = 24$ Möglichkeiten (oder in der Kombinatorik: Ziehen ohne Zurücklegen in Reihenfolge: 4!).

Somit gibt es $1 + 14 + 36 + 24 = 75$ verschiedene Resultate.

Aufgabe 3.3

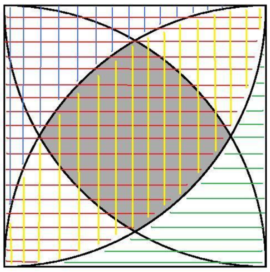


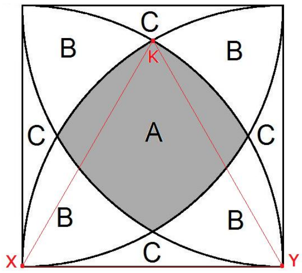
Bei Meditationsübungen in Indien ist Professor Knobel auf ein neues Mandala gestossen. Es besteht aus einem Quadrat, in das vier Viertelkreise einbeschrieben sind.

Natürlich versucht Professor Knobel, den Flächeninhalt der kleinen Zentralfigur in Form eines rundlichen "Vierecks" zu berechnen. Doch erst ein junger buddhistischer Mönch zeigt Knobel einen ziemlich einfachen Weg, diese Masszahl sogar ohne Integralberechnung zu bestimmen.

Wie gross ist die Fläche, wenn das Quadrat $1m^2$ gross ist?

Lösung 3.3





Die Kreisfläche eines Kreises mit Radius π berechnet sich durch $\pi * r^2$. Betrachtet man den roten Teil des Mandalas, so ist dies ein viertel Kreis mit Radius $r = 1$. Die Fläche ist also $\frac{1}{4} * \pi * r^2 = \frac{\pi}{4}$. Daraus folgt, dass die grüne Fläche $1 - \frac{\pi}{4}$ groß ist. Da die blaue und grüne Fläche den gleichen Flächeninhalt haben, so erhält man den Flächeninhalt der gelbe Fläche mit $\frac{\pi}{4} - (1 - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2} - 1$.

Unterteilen wir das Mandala nun in die Gebiete A, B und C. Die Größe von A ist gesucht. Dazu berechnen wir zuerst B und C. Betrachten wir die Fläche mit den Ecken X, Y und K, die von zwei Kreisbögen und einer Quadratseite begrenzt wird. Ihre Fläche ist gerade $A + 2B + C$, und sie setzt sich zusammmen aus dem gleichseitigen Dreieck XYK und zwei Kreisabschnitten, deren zugehörige Mittelpunktswinkel $60°$ groß sind. Ersteres hat eine Fläche von $\frac{\sqrt{3}}{4}$ und Letztere haben jeweils eine Fläche von $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ (die Fläche eines Sechstelkreises minus der Fläche eines gleichseitigen Dreiecks). Daher gilt:

$A + 2B + C = \frac{\sqrt{3}}{4} + 2 * (\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

Da die gelbe Fläche gerade $A + 2B = \frac{\pi}{2} - 1$ ist, können wir nun C ausrechnen.

$C = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} - (\frac{\pi}{2} - 1) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}$

Mit C können wir nun B berechnen. Die blaue bzw. grüne Fläche ist $B + 2C$. Also:

$B + 2C = 1 - \frac{\pi}{4} \Longrightarrow B = 1 - \frac{\pi}{4} - 2 * (1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}) = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12}$.

Mit B lässt sich nun A berechnen. Die gelbe Fläche ist gerade $A + 2B$. Also gilt:

$A + 2B = \frac{\pi}{2} - 1 \Longrightarrow A = \frac{\pi}{2} - 1 - 2 * (-1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12}) = 1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} \approx 0.315147$.

Aufgabe 3.4
Ein Mord ist geschehen - aber wer war der Mörder?

In einem Haus mit sechs Zimmern (Küche, Wohnzimmer, Bad und drei Schlafzimmer) wurde ein Mord verübt. Der Mörder war mit seinem Opfer allein, als die Tat geschah.

Von den sechs befragten Personen John, Mary, Sam, Terry, Albert und Petra war einer der Mörder. Zwei der sechs Personen sind Lügner: Mindestens eine ihrer Aussagen ist gelogen. Die anderen vier sagen stets die Wahrheit. Hier ihre Aussagen:

1. John:
   - Sam war im Wohnzimmer.
   - Mary war im ersten Schlafzimmer.
   - Ich war in der Küche.
2. Mary:
   - Sam war im zweiten Schlafzimmer.
   - Terry war im ersten Schlafzimmer.
   - Albert war auch im ersten Schlafzimmer
3. Sam:
   - Ich war im Wohnzimmer.
   - John war in der Küche.
   - Petra war im Bad.
4. Terry:
   - John war in der Küche.
   - Sam war im Wohnzimmer.
   - Petra war im Bad.
5. Albert:
   - Terry war im ersten Schlafzimmer.
   - Ich war im Bad.
   - Petra war in der Küche.
6. Petra:
   - Albert war im dritten Schlafzimmer.
   - Sam war im Wohnzimmer.
   - John war in der Küche.

Das Opfer wurde im zweiten Schlafzimmer gefunden - wer war der Mörder?

Lösung 3.4

Sowohl John als auch Terry, Petra und Sam sagen, dass **Sam** im **Wohnzimmer** war. Da nur zwei Personen lügen, muss Sam wirklich im Wohnzimmer gewesen sein. So kann man auch erkennen, dass **John** in der **Küche** war, denn John, Terry und Petra behaupten dies.
Da Sam im Wohnzimmer und John in der Küche war, so weiß man, dass Mary lügt.
Sam und Terry sagen, das **Petra** im **Bad** war. Da nur einer von beiden lügen kann (da Mary schon lügt), so war Petra wirklich im Bad. Da Albert behauptet, Petra wäre in der Küche gewesen, ist er der zweite Lügner.
Somit sind alle Aussagen von John, Sam, Terry und Petra wahr. Laut John war **Mary** also im **ersten Schlafzimmer**, und laut Petra war **Albert** im **dritten Schlafzimmer**. Nur über Terrys Aufenthaltsort wird keine Aussage gemacht.

Somit war Terry im zweiten Schlafzimmer und ist der Mörder.