Dr. Michael J. Winckler
Mathe–Star–Initiative
IWR, Raum 502, INF 368, 69120 Heidelberg
Michael.Winckler@iwr.uni-heidelberg.de
http://www.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/Mathe-Star/

Mathe–Star Lösungen Runde 3 2008/09

Allgemeine Lösungeshinweise

Die folgenden Tipps fassen einige Punkte zusammen, die zur *vollständigen und fehlerfreien* Beantwortung von Aufgaben beachtet werden sollten.

1. Enger Bezug zum Aufgabentext

   Im Rahmen der Bearbeitung der Frage sollten nur aus den in der Aufgabe explizit genannten Hinweisen Schlüsse gezogen werden. Die Einbeziehung weiterer Annahmen in die Aufgabe ist nur insoweit gerechtfertigt, als sie sich zweifelsfrei aus den allgemeinen Bemerkungen zur Aufgabenstellung ergeben.

   Beispielsweise kann von einem *Ball* in einer Aufgabenstellung angenommen werden, dass es sich um eine perfekte Kugel handelt. Vermessungsaufgaben in freier Natur können (falls nicht explizit anders angegeben) in der Ebene (d.h. unter Vernachlässigung der Erdkrümmung) berechnet werden. Von einem *5-Liter-Gefäß* kann man aber *nicht* annehmen, dass es eine Messskala besitzt oder dass man es verwenden kann, um andere Masseinheiten als 5 Liter abzumessen.

2. Vollständigkeit der Antwort und logisches Ableiten

   Zu den in der Aufgabenstellung aufgestellten Behauptungen und Fragen muss in der Lösung Stellung bezogen werden. Aus einem Antwortsatz oder einer anderen geeigneten schriftlichen Darlegung muss klar zum Ausdruck kommen, wie die richtige Lösung zum gestellten Problem aussieht.

   Zu dieser Antwort sollte im Rahmen der Ausarbeitung der Lösung eine logische Ableitung verfasst werden. Dabei sind alle wesentlichen Gedankenschritte von der Aufgabenstellung bis zur Lösung darzustellen.

   Kann aus der Angabe der Lösung unmittelbar deren Richtigkeit festgestellt werden (z.B. bei einem Sudoku), so ist es hilfreich, eine Bemerkung zur *Eindeutigkeit* der gegebenen Lösung zuzufügen. Die Frage, ob es zu einem Problem mehrere Lösungen gibt, ist in der Mathematik von fundamentaler Bedeutung für die Bewertung einer angegebenen bzw. gefundenen Lösung.

3. Lesbarkeit und Darstellung

   Die Lösung einer Aufgabe soll es einem neutralen Beobachter ermöglichen, die Richtigkeit des Schlusses nachzuvollziehen und dabei die verwendeten Hilfsmittel kennenzulernen. In diesem Sinne ist eine Darstellung der Lösung vorzuziehen, die prägnant und übersichtlich die Lösungsidee darstellt.

   Zeichnungen oder Diagramme können ein Hilfsmittel zur Verdeutlichung eines Lösungswegs sein. Dabei ist aber meist ein ergänzender Kommentar notwendig, um die Lösungsidee verständlich zu machen.

   Bei handschriftlichen Lösungen ist zudem eine klare und lesbare Schrift notwendig. Symbole und Kurzschriften sollten erläutert werden, wenn es sich nicht um mathematische Standard(-Schul)-Notation handelt.

Sektion 1: Klasse 11-13

Aufgabe 3.1 Zahlengitter

				334
				253
				613
				451
244	370	613	424	

Wie bei einem gewöhnlichen Gitterrätsel sollen in dieses Gitter die Zahlen von 1 bis 4 viermal so eingetragen werden, dass in jeder Zeile und Spalte jede Ziffer genau 1x vorkommt.

Danach sind an die Ziffern Nullen so anzuhängen, dass sich die jeweils angegebenen Zahlen als Zeilen- bzw. Spaltensummen ergeben.

Lösung 3.1

Die Lösung ist nicht schwer zu finden, wenn man sich für jedes Feld überlegt, welche Zahlen passen würden. Beispielsweise muss im Feld links oben eine 4 stehen, da man sonst nicht auf eine Zeile- und Spaltensumme mit Einerziffer 4 kommt, die gleichzeitig auch noch Hunderter- und Zehnerziffern enthält. So ergibt ich auch die 1 rechts unten und die 3 im rechten Feld der zweiten Zeile. Damit fallen für die anderen Felder schon einige an Möglichkeiten weg. Die letzte Spalte ergibt sich dann von selbst, da oben links ein Eintrag mit einer 2 stehen muss. Fährt man so fort, bleiben immer weniger Möglichkeiten für die anderen Felder übrig. Man kommt zu der Lösung:

4	300	10	20	334
10	40	200	3	253
200	10	3	400	613
30	20	400	1	451
244	370	613	424	

Aufgabe 3.2 Befreundete Zahlen

Man nennt zwei Zahlen x und y befreundet, wenn die *Summe* aller echten Teiler der Zahl x gerade y ergibt und umgekehrt. Dabei sind *echte Teiler* alle Teiler, die kleiner als die Zahl sind: Die echten Teiler von 12 sind also 1, 2, 3, 4 und 6; ihre Summe ist 16.

Schon die Araber wussten viel über Paare von befreundeten Zahlen. So bewies im 9.Jahrhundert Thabit ben Korrah folgendes:

Wenn die Zahlen $a = 3 * 2^n - 1$ *sowie* $b = 3 * 2^{n-1} - 1$ *und* $c = 9 * 2^{2n-1} - 1$ *alle drei Primzahlen sind, dann sind* $x = 2^n * a * b$ *und* $y = 2^n * c$ *befreundete Zahlen.*

Beweise, dass unter den gemachten Voraussetungen an a, b und c die beiden Zahlen x und y wirklich befreundet sind.

Lösung 3.2

Da in der Aufgabenstellung die Bedingung $n > 1$ fehlt, wurden auch diejenigen Lösungen als richtig bewertet, die für den Fall $n = 1$ die Behauptung widerlegt haben.
Für $n = 1$ ist $a = 5$, $b = 2$, $c = 17$, also alles Primzahlen. Dann ist $x = 20$ und $y = 34$.
Die echten Teiler von x sind $1, 2, 4, 5, 10$ und $1 + 2 + 4 + 5 + 10 = 22 \neq y$. Widerspruch.

Für $n > 1$ gilt die Behauptung jedoch.
Beweis: Wir zeigen zunächst: Die Summe der echten Teiler von y ist gerade x.

Teiler von y: $2^0 (= 1), 2^1, 2^2, ..., 2^n, 2^0 * c (= c), 2^1 * c, 2^2 * c, ..., 2^{n-1} * c$
Das sind alle echten Teiler von y ($2^n * c$ ist kein echter Teiler, da $2^n * c = y$). Die ersten Teiler kann man zu $\sum_{i=0}^{n} 2^i$ zusammmenfassen, die restlichen Teiler zu $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i * c$.
Es gilt also: Summe der echten Teiler von $y =$

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i + \sum_{i=0}^{n-1} 2^i * c$$

Durch Umformen erhält man:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} 2^i + \sum_{i=0}^{n-1} 2^i * c &= (2^{n+1} - 1) + (2^n - 1) * c \\
&= (2^{n+1} - 1) + (2^n - 1) * (9 * 2^{2n-1} - 1) \\
&= (2^{n+1} - 1) + (2^n - 1) * (9 * 2^{2n-1}) - (2^n - 1) \\
&= 2^{n+1} - 2^n + (2^n * 9 * s^{2n-1}) - 9 * 2^{2n-1} \\
&= 2^{n+1} - 2^n + 9 * 2^{2n-1+n} - 9 * 2^{2n-1} \\
&= 2^{n+1} - 2^n - 9 * 2^{2n-1} + 9 * 2^{3n-1} \\
&= 2^n * (2^1 - 2^0 - 9 * 2^{n-1} + 9 * 2^{2n-1}) \\
&= 2^n * (1 - 9 * 2^{n-1} + 9 * 2^{2n-1}) \\
&= 2^n * (2^{n-1} + (-9 + 9 * 2^n) + 1) \\
&= 2^n * (2^{n-1} + (9 * 2^n - 6 - 3) + 1) \\
&= 2^n * (9 * 2^{2n-1} - 3 * 2^n - 3 * 2^{n-1} + 1) \\
&= 2^n * ((3 * 2^n - 1) * (3 * 2^{n-1} - 1)) \\
&= 2^n * a * b = x
\end{aligned}$$

Somit ist die Summe der echten Teiler von y gerade x.

Bleibt noch zu zeigen: Die Summe der echten Teiler von x ist gerade y.

Teiler von x: $2^0(=1), 2^1, 2^2, ..., 2^n, 2^0*a(=a), 2^1*a, 2^2*a, ..., 2^n*a, 2^0*b(=b), 2^1*b, 2^2*b, ..., 2^n*b, 2^0*ab(=ab), 2^1*ab, 2^2*ab, ..., 2^{n-1}*ab$
Das sind alle echten Teiler von x. Die ersten Teiler kann man zu $\sum_{i=0}^{n} 2^i$ zusammmenfassen, die nächsten zu $\sum_{i=0}^{n} 2^i * a$ bzw. zu $\sum_{i=0}^{n} 2^i * b$ und die restlichen Teiler zu $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i * a * b$.
Es gilt also: Summe der echten Teiler von $x =$

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i + \sum_{i=0}^{n} 2^i * a + \sum_{i=0}^{n} 2^i * b + \sum_{i=0}^{n-1} 2^i * a * b$$

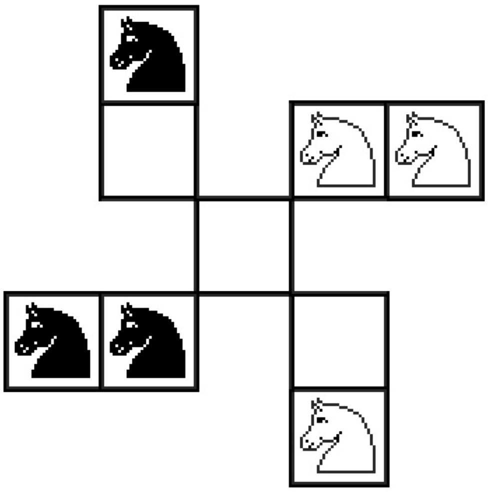
Mit etwas Umformen erhält man:
$\sum_{i=0}^{n} 2^i + \sum_{i=0}^{n} 2^i * a + \sum_{i=0}^{n} 2^i * b + \sum_{i=0}^{n-1} 2^i * a * b$

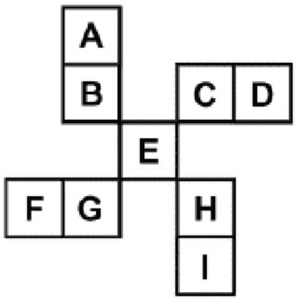
$= (2^{n+1}-1) + (2^{n+1}-1) * a + (2^{n+1}-1) * b + (2^n - 1) * a * b$
$= (2^{n+1}-1) + (2^{n+1}-1) * (3 * 2^n - 1) + (2^{n+1}-1) * (3 * 2^{n-1} - 1) + (2^n - 1) * (3 * 2^n - 1) * (3 * 2^{n-1} - 1)$
$= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} * 3 * 2^n - 2^{n+1} - 3 * 2^n + 1 + 2^{n+1} * 3 * 2^{n-1} - 2^{n+1} - 3 * 2^{n-1} + 1$
$+ (2^n * 3 * 2^n - 2^n - 3 * 2^n + 1) * (3 * 2^{n-1} - 1)$
$= 2^{n+1} - 1 + 3 * 2^{2n+1} - 2^{n+1} - 3 * 2^n + 1 + 3 * 2^{2n} - 2^{n+1} - 3 * 2^{n-1} + 1 + 3 * 2^{2n} * 3 * 2^{n-1} - 3 * 2^{n-1}$
$+ 2^n - 3 * 2^n * 3 * 2^{n-1} + 3 * 2^{n-1} - 3 * 2^{2n} + 2^n + 3 * 2^n - 1$
$= 2^{n+1} + 3 * 2^{2n+1} - 2^{n+1} - 3 * 2^n + 3 * 2^{2n} - 2^{n+1} - 3 * 2^{n-1} + 9 * 2^{3n-1} - 3 * 2^{n-1} - 9 * 2^{2n-1} + 3 * 2^{n-1}$
$- 3 * 2^{2n} + 2^n + 3 * 2^n$
$= 3 * 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 9 * 2^{3n-1} - 12 * 2^{2n-1} + 2^n$
$= 2^n * (3 * 2^{n+1} - 2^1 + 9 * 2^{2n-1} - 12 * 2^{n-1} + 2^0)$
$= 2^n * (3 * 2^{n+1} - 12 * 2^{n-1} + 9 * 2^{2n-1} - 1)$
$= 2^n * (2^{n+1} * (3 * 2^2 - 12) + 9 * 2^{2n-1} - 1)$
$= 2^n * (9 * 2^{2n-1} - 1)$
$= 2^n * c = y$

Somit ist die Summe der echten Teiler von x gerade y.

qed.

Aufgabe 3.3 Springer springen ...





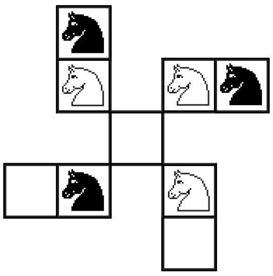
Auf dem sehr eingeschränkten Schachbrett sollen die drei schwarzen und die drei weissen Springer die Plätze tauschen! Dabei darf jeder Springer nur in Springermanier ziehen: zwei Felder in eine Richtung und dann eines zur Seite. Dabei dürfen nicht eingezeichnete Felder übersprungen werden, die Springer dürfen aber nur auf den 9 eingezeichneten Feldern landen.

Die Abbildung rechts gibt die Benennung der Felder an. Schreibe die Züge mit den Feldbuchstaben auf (z.B. A nach E; ...).

Lösung 3.3

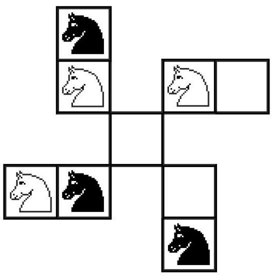
D → H
F → E
E → D
I → E
E → F
F → B

⇒



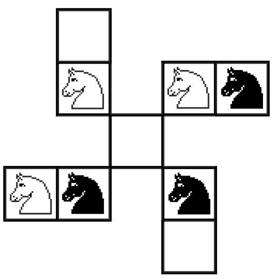
D → E
E → I
H → D
D → E
E → F

⇒



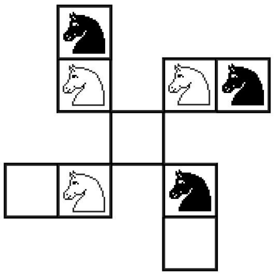
A → E
E → D
D → H
I → E
E → D

⇒



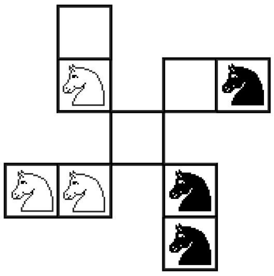
G → I
I → E
E → A
F → E
E → I
I → G

$\Rightarrow$



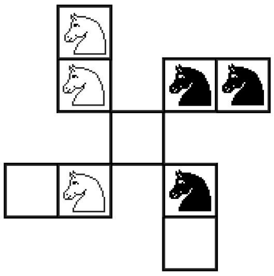
A → E
E → I
C → A
A → E
E → F

$\Rightarrow$



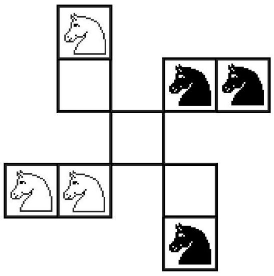
I → E
E → A
A → C
F → E
E → A

$\Rightarrow$



B → F
D → E
E → I
H → D

$\Rightarrow$



Aufgabe 3.4 eine echt laaaaange Multiplikation

Wenn du 51! (51 Fakultät) ausrechnen würdest:

- Auf welche Ziffer endet diese Zahl?
- Wie oft kommt diese Ziffer am Ende der Zahl hintereinander vor?

Begründe deine Antwort!

Lösung 3.4

Die Zahl endet auf die Ziffer 0, denn $51! = (51 * 50 * ... * 10 * ... * 2 * 1)$ ist durch 10 teilbar.

Die 0 kommt am Ende der Zahl zwölf mal hintereinander vor.

Begründung:
Da $10 = 2 * 5$ genügt es zu überlegen, wie oft die 2 und die 5 in der Primfaktorzerlegung von 51! vorhanden sind.

Die 5 kommt in der Primfaktorzerlegung jeder fünften Zahl der Zahlen $1, 2, 3, ...51$ vor (in $5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50$), also zehnmal. In $25 = 5 * 5$ und $50 = 2 * 5 * 5$ jedoch kommt sie zweimal vor, dashalb haben wir in der Primfaktorzerlegung der 51! zwölf Fünfen.

Die 2 kommt in jeder zweiten Zahl mindestens einmal vor, also in mehr als 12 Zahlen. Somit ist 51! zwölfmal durch 10 teilbar, hat also zwölf Nullen am Ende.