Dr. Michael J. Winckler
Mathe–Star–Initiative
IWR, Raum 502, INF 368, 69120 Heidelberg
Michael.Winckler@iwr.uni-heidelberg.de
http://www.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/Mathe-Star/

# Mathe–Star Lösungen Runde 3 2005/06

**Allgemeine Lösungeshinweise**

Die folgenden Tipps fassen einige Punkte zusammen, die zur *vollständigen und fehlerfreien* Beantwortung von Aufgaben beachtet werden sollten.

1. Enger Bezug zum Aufgabentext

   Im Rahmen der Bearbeitung der Frage sollten nur aus den in der Aufgabe explizit genannten Hinweisen Schlüsse gezogen werden. Die Einbeziehung weiterer Annahmen in die Aufgabe ist nur insoweit gerechtfertigt, als sie sich zweifelsfrei aus den allgemeinen Bemerkungen zur Aufgabenstellung ergeben.

   Beispielsweise kann von einem *Ball* in einer Aufgabenstellung angenommen werden, dass es sich um eine perfekte Kugel handelt. Vermessungsaufgaben in freier Natur können (falls nicht explizit anders angegeben) in der Ebene (d.h. unter Vernachlässigung der Erdkrümmung) berechnet werden. Von einem *5-Liter-Gefäß* kann man aber *nicht* annehmen, dass es eine Messskala besitzt oder dass man es verwenden kann, um andere Masseinheiten als 5 Liter abzumessen.

2. Vollständigkeit der Antwort und logisches Ableiten

   Zu den in der Aufgabenstellung aufgestellten Behauptungen und Fragen muss in der Lösung Stellung bezogen werden. Aus einem Antwortsatz oder einer anderen geeigneten schriftlichen Darlegung muss klar zum Ausdruck kommen, wie die richtige Lösung zum gestellten Problem aussieht.

   Zu dieser Antwort sollte im Rahmen der Ausarbeitung der Lösung eine logische Ableitung verfasst werden. Dabei sind alle wesentlichen Gedankenschritte von der Aufgabenstellung bis zur Lösung darzustellen.

   Kann aus der Angabe der Lösung unmittelbar deren Richtigkeit festgestellt werden (z.B. bei einem Sudoku), so ist es hilfreich, eine Bemerkung zur *Eindeutigkeit* der gegebenen Lösung zuzufügen. Die Frage, ob es zu einem Problem mehrere Lösungen gibt, ist in der Mathematik von fundamentaler Bedeutung für die Bewertung einer angegebenen bzw. gefundenen Lösung.

3. Lesbarkeit und Darstellung

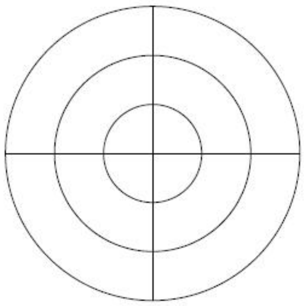
   Die Lösung einer Aufgabe soll es einem neutralen Beobachter ermöglichen, die Richtigkeit des Schlusses nachzuvollziehen und dabei die verwendeten Hilfsmittel kennenzulernen. In diesem Sinne ist eine Darstellung der Lösung vorzuziehen, die prägnant und übersichtlich die Lösungsidee darstellt.

   Zeichnungen oder Diagramme können ein Hilfsmittel zur Verdeutlichung eines Lösungswegs sein. Dabei ist aber meist ein ergänzender Kommentar notwendig, um die Lösungsidee verständlich zu machen.

   Bei handschriftlichen Lösungen ist zudem eine klare und lesbare Schrift notwendig. Symbole und Kurzschriften sollten erläutert werden, wenn es sich nicht um mathematische Standard(-Schul)-Notation handelt.

# Sektion 4: Klasse 5-7 (Teams)

### Aufgabe 4.1

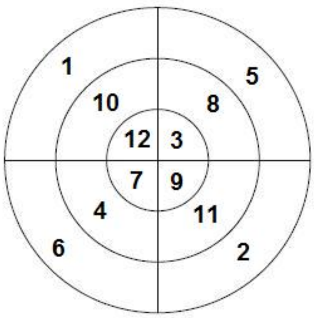


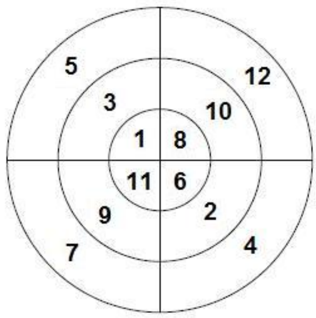
Kevin Knobel entwirft eine neue Darts-Scheibe. Er hat das Brett schon in 12 Segmente unterteilt und ist nun dabei, die Zahlen von 1 bis 12 auf die Segmente zu übertragen. Damit die Zahlen auf dieser Scheibe möglichst bunt verteilt sind, hat er sich folgende Regel ausgedacht: Zahlen, die unmittelbar aufeinander folgen (wie 6 und 7 oder 11 und 12) müssen auf der Dartsscheibe in Feldern stehen, die sich nicht berühren - auch nicht „diagonal" über's Eck.

Nach etwas rumprobieren stellt er fest, dass es sogar mehrere Lösungen für diese Aufgabe gibt. Kannst du *eine* finden?

**Lösung:**

Mögliche Lösungen wären beispielsweise:




### Aufgabe 4.2

Um den Brauchwasserbehälter der Knobels in Trockenzeiten mit Leitungswasser zu füllen, gibt es vier verschiedenen Rohre. Das erste Rohr benötigt einen Tag, um den Behälter zu füllen, das zweite zwei Tage, das dritte drei Tage und das vierte vier Tage.

Als Sina Knobel abends die Blumen im Garten wässern will, bemerkt sie, dass der Behälter ganz leer ist. Sie dreht alle vier Rohre gleichzeitig auf. Wie lange (in Studenen und Minuten) dauert es, bis der Behälter ganz voll ist?

**Lösung:**

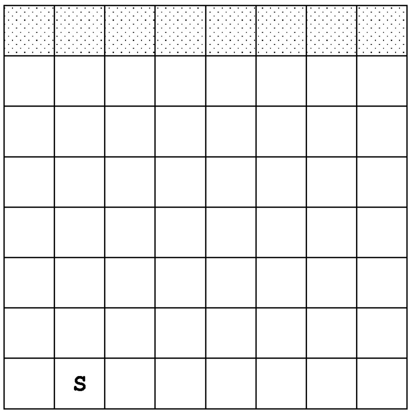
Es ist hilfreich sich zu überlegen, wieviel des Behälters ein Rohr in einer Stunde füllt.
Das erste Rohr füllt in einer Stunde $\frac{1}{24}$ des Behälters, das zweite $\frac{1}{48}$, das dritte $\frac{1}{72}$ und das vierte $\frac{1}{96}$.
Öffnet man alle Röhre gleichzeitig, so werden in einer Stunde
$\frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{72} + \frac{1}{96} = \frac{12+6+4+3}{288} = \frac{25}{288}$ des Behälters gefüllt.

Sei $x$ die Anzahl der Stunden, die benötigt werden um den Behälter komplett zu füllen. Es gilt:

$\frac{25}{288} * x = 1$ Daaus folgt:
$x = \frac{288}{25}$h= 11.52h= 11h 31min 12s

Es dauert also 11 Stunden, 31 Minuten und 12 Sekunden bis der Behälter ganz voll ist.

**Aufgabe 4.3**



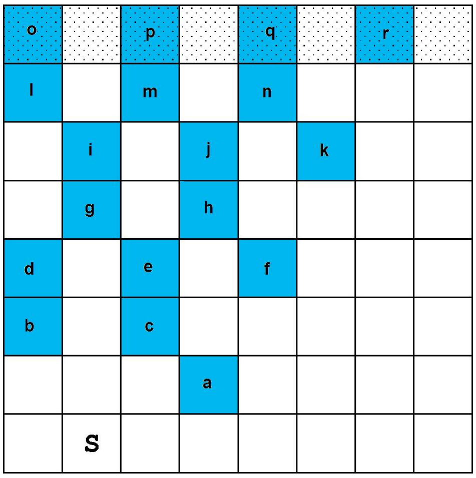

Sina Knobel kann sich beim Schachspielen nie so richtig konzentrieren. Immer wieder denkt sie mehr über Knobeleien nach, als sich der Spielstrategie zu widmen – so auch heute.

Auf dem mit "S" markierten Feld steht einer von Sinas Springern. Wievielen Zügen **braucht sie mindestens (!)**, um ihn auf die gegenüberliegende Grundlinie zu bringen? Welche Felder kann sie dabei erreichen und wieviele verschiedene Wege gibt es, um mit dieser Zugzahl auszukommen?

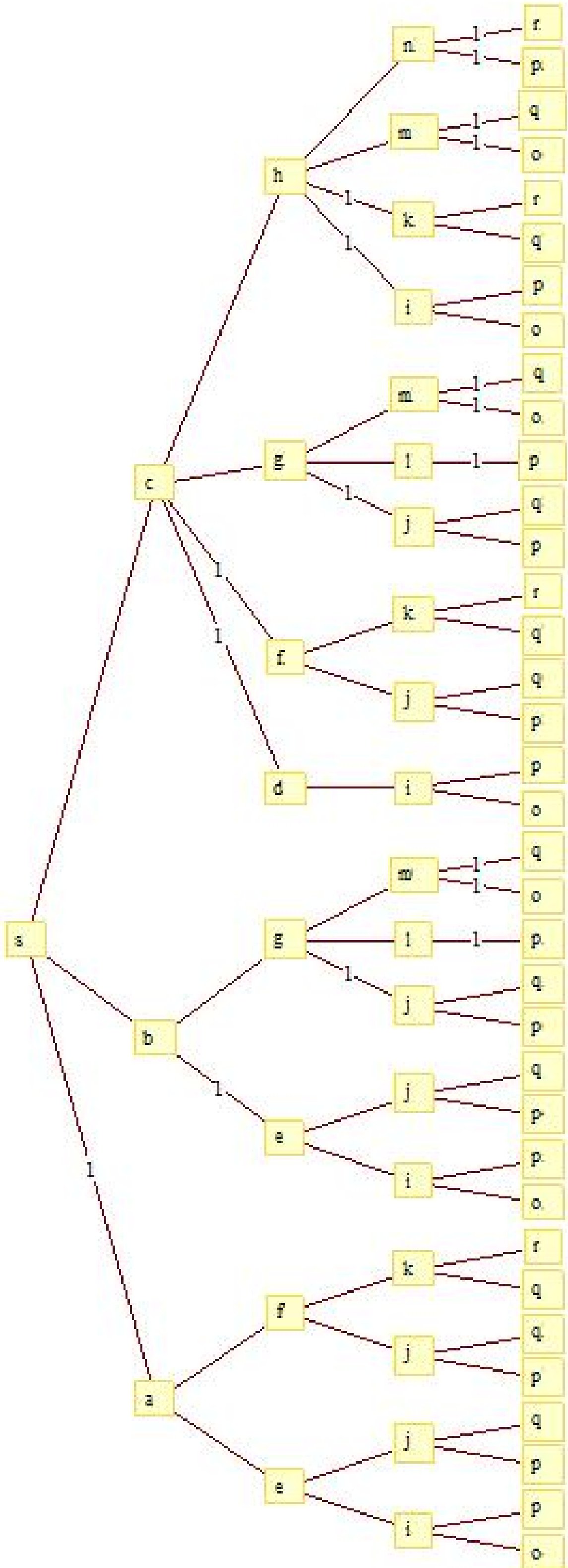
**Lösung:**

Sie braucht mindestens vier Züge. Begründung:
Der Springer muss sieben Zeilen nach oben springen. Da er aber in einem Zug nur höchstens zwei Zeilen nach oben kommt, so braucht er drei Züge, in denen er zwei Zeilen höher springt, und einen Zug, in dem er nur noch eine Zeile höher springt. Dabei spielt es keine Rolle in welcher Reihenfolge die Züge gemacht werden. Sina kann den einen Sprung, in dem der Spinger nur eine Zeile höher springt, gleich am Anfang machen, aber auch als zweiten, dritten oder vierten Zug.

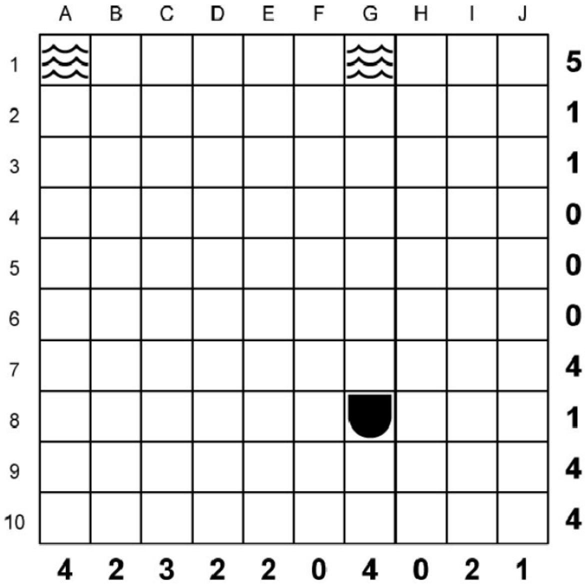
Die blau markierten Felder können dabei erreicht werden.

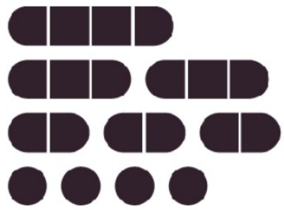


Es gibt 36 verschiedene Wege, die der Springer in vier Zügen nach oben springen kann. Dies veranschaulicht das Baumdiagramm rechts. Wichtig ist nur, dass bei jedem Weg einmal nur eine Zeile hoch gesprungen wird. Dies erkennt man an der "1" auf den Kanten. Sind die Kanten nicht beschriftet, so handelt es sich um einen Sprung über zwei Zeilen.



**Aufgabe 4.4**



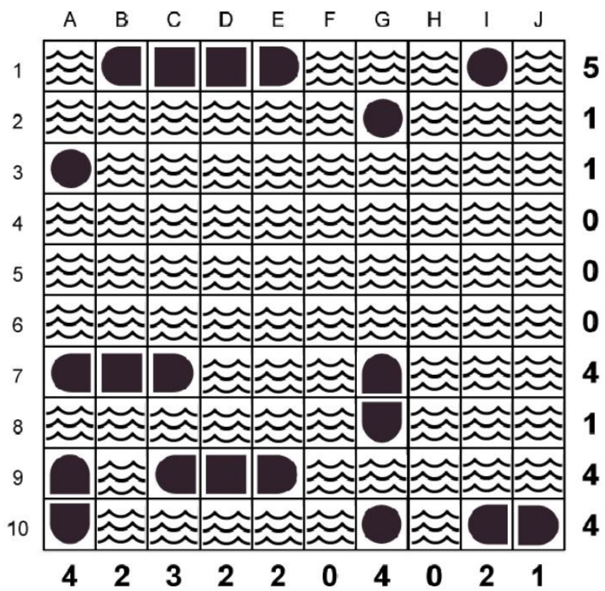



Professor Knobel und Herr Mystere spielen Schiffe versenken. Dabei ist bei jeder Reihe und Spalte (rechts und unten) schon angegeben, wieviele Schiffsteile sich in ihr befinden. Zudem kennt Professor Knobel schon zwei Wasserfelder und den Anfang eines der versteckten Schiffe. Schiffe dürfen nur waagerecht oder senkrecht versteckt werden. Dabei dürfen sie sich nicht berühren – nicht einmal diagonal über Eck.

Kann er allein mit diesen Angaben die Position aller Schiffe bestimmen?

**Lösung:**

Ja, er kann mit diesen die Position aller Schiffe bestimmen.
Der Spielplan sieht wie folgt aus:



### Aufgabe 4.5

Finde den Weg durch das Gartenlabyrinth der Knobels: Auf den einzelnen Rasenfelder stehen Schilder, wieviele Felder man in gerader Linie weitergehen muss, wenn man auf dem jeweiligen Feld startet. Man beginnt auf der Knobel'schen Terrasse (rotes Feld links oben) und versucht, den Ausgang rechts unten zu erreichen. Der erste Schritt führt dabei beispielsweise entweder auf **f1** oder auf **a6**. Finde einen Weg zum Zielfeld rechts unten und schreibe die dabei verwendeten Felder der Reihe nach auf.

| | a | b | c | d | e | f |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 3 | 3 | 2 | 4 | 4 |
| 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 2 | 4 |
| 3 | 1 | 4 | 1 | 2 | 4 | 2 |
| 4 | 3 | 4 | 1 | 3 | 2 | 3 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 2 | 4 | 4 |
| 6 | 2 | 3 | 5 | 2 | 3 | Goal |

**Lösung:**

Es gibt mehrere Wege durch das Labyrinth. Jeder Weg, der zum Ziel führt, wurde als richtig bewertet. Beispiele:
$a1 \to f1 \to f5 \to b5 \to b2 \to e2 \to e4 \to e6 \to e3 \to a3 \to a2 \to d2 \to d6 \to f6$

$a1 \to a6 \to c6 \to c1 \to c4 \to c3 \to d3 \to d5 \to b5 \to b2 \to e2 \to e4 \to e6 \to e3 \to a3 \to a2 \to d2 \to d6 \to f6$

### Aufgabe 4.6

In einem normalen 3x3 magischen Quadrat stehen die Zahlen von 1 bis 9 so, dass die Summe jeder Zeile und Spalte gleich ist.

In einem **multiplikativen** magischen Quadrat stehen die Ziffern so, dass das **Produkt** der Zahlen in jeder Zeile und Spalte gleich ist. Begründe, warum es kein multiplikatives magisches Quadrat der Grösse 3x3 mit den Ziffern 1-9 geben kann!

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |

**Lösung:**

Es kann kein solches Quadrat geben, denn setze beispielsweise die 7 in ein beliebiges Feld (Man beachte: 7 ist eine Primzahl, ist also nur durch 1 und sich selbst teilbar!), so ergibt sich für das Produkt in der Zeile : $7 * x * y$.
Das gleiche Ergebnis soll nun auch die Multiplikation der Zahlen in der letzten Spalte ergeben. Also $7*x*y = u*v*w$, wobei $u$,$v$,$w$ aus {1,2,3,4,5,6,8,9} sind. Da aber so in keiner der Primfaktorzerlegungen der Zahlen $u$,$v$,$w$ die 7 enthalten ist, kann das Produkt niemals mit $7 * x * y$ übereinstimmen, egal wie $x$ und $y$ gewählt sind.

| | | |
|---|---|---|
| 7 | x | y |
| | | |
| u | v | w |