

Dr. Michael J. Winckler
Mathe-Star-Initiative
IWR, Raum 502, INF 368, 69120 Heidelberg
Michael.Winckler@iwr.uni-heidelberg.de
<http://www.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/Mathe-Star/>



Mathe-Star Lösungen Runde 3 2008/09

Allgemeine Lösungshinweise

Die folgenden Tipps fassen einige Punkte zusammen, die zur *vollständigen und fehlerfreien* Beantwortung von Aufgaben beachtet werden sollten.

1. Enger Bezug zum Aufgabentext

Im Rahmen der Bearbeitung der Frage sollten nur aus den in der Aufgabe explizit genannten Hinweisen Schlüsse gezogen werden. Die Einbeziehung weiterer Annahmen in die Aufgabe ist nur insoweit gerechtfertigt, als sie sich zweifelsfrei aus den allgemeinen Bemerkungen zur Aufgabenstellung ergeben.

Beispielsweise kann von einem *Ball* in einer Aufgabenstellung angenommen werden, dass es sich um eine perfekte Kugel handelt. Vermessungsaufgaben in freier Natur können (falls nicht explizit anders angegeben) in der Ebene (d.h. unter Vernachlässigung der Erdkrümmung) berechnet werden. Von einem *5-Liter-Gefäß* kann man aber *nicht* annehmen, dass es eine Messskala besitzt oder dass man es verwenden kann, um andere Masseinheiten als 5 Liter abzumessen.

2. Vollständigkeit der Antwort und logisches Ableiten

Zu den in der Aufgabenstellung aufgestellten Behauptungen und Fragen muss in der Lösung Stellung bezogen werden. Aus einem Antwortsatz oder einer anderen geeigneten schriftlichen Darlegung muss klar zum Ausdruck kommen, wie die richtige Lösung zum gestellten Problem aussieht.

Zu dieser Antwort sollte im Rahmen der Ausarbeitung der Lösung eine logische Ableitung verfasst werden. Dabei sind alle wesentlichen Gedankenschritte von der Aufgabenstellung bis zur Lösung darzustellen.

Kann aus der Angabe der Lösung unmittelbar deren Richtigkeit festgestellt werden (z.B. bei einem Sudoku), so ist es hilfreich, eine Bemerkung zur *Eindeutigkeit* der gegebenen Lösung zuzufügen. Die Frage, ob es zu einem Problem mehrere Lösungen gibt, ist in der Mathematik von fundamentaler Bedeutung für die Bewertung einer angegebenen bzw. gefundenen Lösung.

3. Lesbarkeit und Darstellung

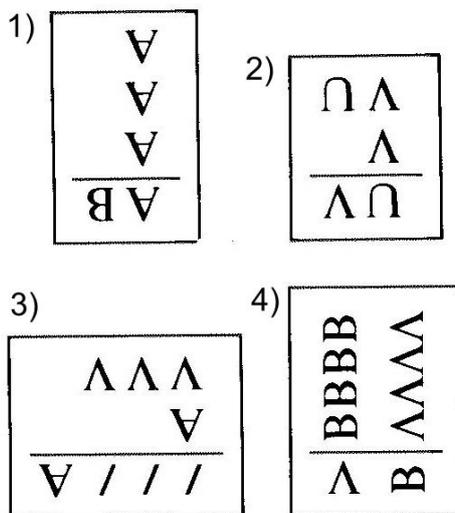
Die Lösung einer Aufgabe soll es einem neutralen Beobachter ermöglichen, die Richtigkeit des Schlusses nachzuvollziehen und dabei die verwendeten Hilfsmittel kennenzulernen. In diesem Sinne ist eine Darstellung der Lösung vorzuziehen, die prägnant und übersichtlich die Lösungsidee darstellt.

Zeichnungen oder Diagramme können ein Hilfsmittel zur Verdeutlichung eines Lösungswegs sein. Dabei ist aber meist ein ergänzender Kommentar notwendig, um die Lösungsidee verständlich zu machen.

Bei handschriftlichen Lösungen ist zudem eine klare und lesbare Schrift notwendig. Symbole und Kurzschriften sollten erläutert werden, wenn es sich nicht um mathematische Standard(-Schul)-Notation handelt.

Sektion 4: Klasse 5-7 (Gruppen)

Aufgabe 4.1 So rechnet die Litanier!



Professor Knobel bekommt Besuch von seinem Kollegen aus den Altertumswissenschaften, Professor Nathanel. Professor Nathanel hat bei Ausgrabungen in Italien vier Tontafeln gefunden, die Rechnungen der Litanier darstellen sollen. Die Litanier haben als erstes europäisches Volk das Zehnersystem übernommen – nur haben Sie dabei andere Ziffern verwendet.

Professor Nathanel möchte nun wissen, welche Zeichen für welche Ziffern stehen. Nach einer Weile des Grübelns kann Professor Knobel ihm diese Frage für die Ziffern auf den Tafeln beantworten. Dabei stellt sich sogar heraus, dass nur drei Tafeln wirklich litanisch sind, während eine der vier Tafeln nicht von den Litaniern stammt, sondern wohl eine Fälschung ist.

Welche Ziffern kann Professor Knobel identifizieren? Und welche Tafel ist gefälscht?

Lösung 4.1

Für die Lösung dieser Aufgabe gab es zwei Möglichkeiten:

- Die Tontafel 3 ist die Fälschung. In diesem Fall steht auf der ersten Tafel: $5+5+5=15$. Auf der zweiten: $89+9=98$, und auf der vierten: $23+23+23+23=92$.
Für die Zeichen gilt also:

$$\nabla = 5 \quad \text{B} = 1 \quad \cup = 8 \quad \nabla = 9 \quad \text{B} = 2 \quad \text{<} = 3$$

Deshalb müsste dann auf der dritten Tafel stehen: $999+5=1004$, was aber nicht zu den Zeichen des Rechenergebnisses auf der Tafel passt.

$$\text{/} = ? \quad \nabla = ?$$

- Die Tontafel 1 ist die Fälschung. In diesem Fall steht auf der zweiten Tafel: $89+9=98$ (wie oben). Auf der dritten: $999+1=1000$, und auf der vierten: $23+23+23+23=92$ (wie oben).
Für die Zeichen gilt also:

$$\cup = 8 \quad \wedge = 9 \quad \forall = 1 \quad / = 0 \quad \mathfrak{B} = 2 \quad \triangleleft = 3$$

Deshalb müsste dann auf der ersten Tafel stehen: $1+1+1=3$, was aber nicht zu den Zeichen des Rechenergebnisses auf der Tafel passt.

$$\mathfrak{B} = ? \quad \forall = ?$$

Aufgabe 4.2 Eine wahrhaft riesige Summe

Berechne die Summe aller 4-stelligen natürlichen Zahlen.

Begründe deinen Lösungsweg!

Lösung 4.2

Die 4-stelligen Zahlen sind die Zahlen von 1000 bis 9999. Das sind genau 9000 Zahlen.

Die Summe $(1000) + (1001) + (1002) + (1003) + \dots + (9996) + (9997) + (9998) + (9999)$

kann man auch schreiben als:

$$(1000) + (1000 + 1) + (1000 + 2) + (1000 + 3) + \dots + (9999 - 3) + (9999 - 2) + (9999 - 1) + (9999)$$

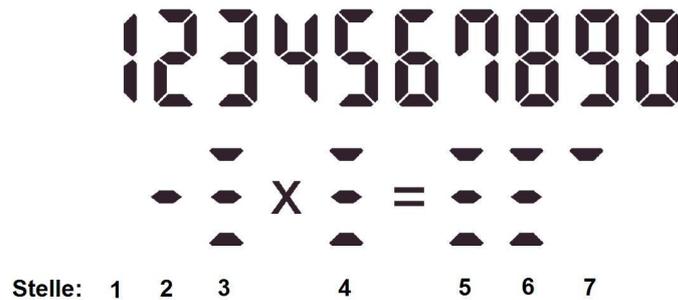
Wenn man die Summanden entsprechend sortiert, erhält man:

$$\begin{aligned} & (1000) + (9999) + (1000 + 1) + (9999 - 1) + (1000 + 2) + (9999 - 2) + (1000 + 3) + (9999 - 3) + \dots \\ & = (1000) + (9999) + (1000) + (9999) + (1000) + (9999) + (1000) + (9999) + \dots \end{aligned}$$

Und das ist, da es dies genau 9000 Zahlen sind:

$$((1000) + (9999)) * 4500 = 10999 * 4500 = \mathbf{49495500}$$

Aufgabe 4.3 Taschenrechner



Beim Taschenrechner, der hier abgebildet ist, sind alle senkrechten Segmente nicht mehr funktionstüchtig (zum Vergleich zeigt die Zeile darüber alle Ziffern eines funktionierenden Taschenrechners).

Kannst du die Rechnung, die eingegeben ist, rekonstruieren?

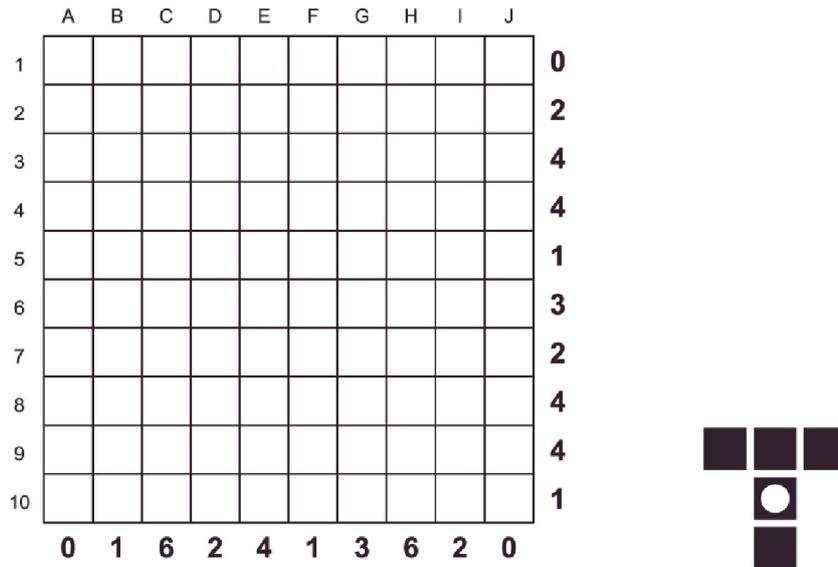
Lösung 4.3

Um die Aufgabe zu lösen und gleichzeitig zu zeigen, dass es nur eine einzige Lösungsmöglichkeit gibt, muss man sich für jede Stelle überlegen, welche Ziffern in Frage kommen. Dabei vergleicht man die gegebenen waagerechten Segmente der Ziffern mit den waagerechten Segmenten der Zahlen 0 bis 9. Es ist zu beachten, dass auch vor den sichtbaren Stellen, noch eine Ziffer stehen könnte. (Richtige, uns eingesandte Lösungen, die diesen Fall nicht behandelt haben, erhielten jedoch trotzdem die volle Punktzahl.)

Man sieht sofort, dass die Ziffer an zweiter Stelle (mit nur einem waagerechten Segment in der Mitte) die **4** sein muss. Genauso muss die letzte Ziffer (mit nur einem waagerechten Segment oben) die **7** sein. Um eine 7 am Ende des Ergebnisses einer Multiplikation zu erhalten, müssen die Einerziffern der Faktoren entweder $1 * 7$ oder $3 * 9$ sein. Damit dies auf die dritte und vierte Stelle passt, müssen es die Zahlen **3** und **9** sein.

Nun ist nur noch zu klären, welche der beiden Ziffern die 3 und welche die 9 sein muss. Wäre an dritter Stelle die 9, so wäre die Rechnung: $49 * 3 = 147$. Da aber an Stelle 6 keine 4 sein kann, so muss die Rechnung lauten: **$43 * 9 = 387$** . Somit sind die anderen Ziffern festgelegt (, wobei an erste Stelle keine Eingabe steht).

Aufgabe 4.4 Schiffe versenken

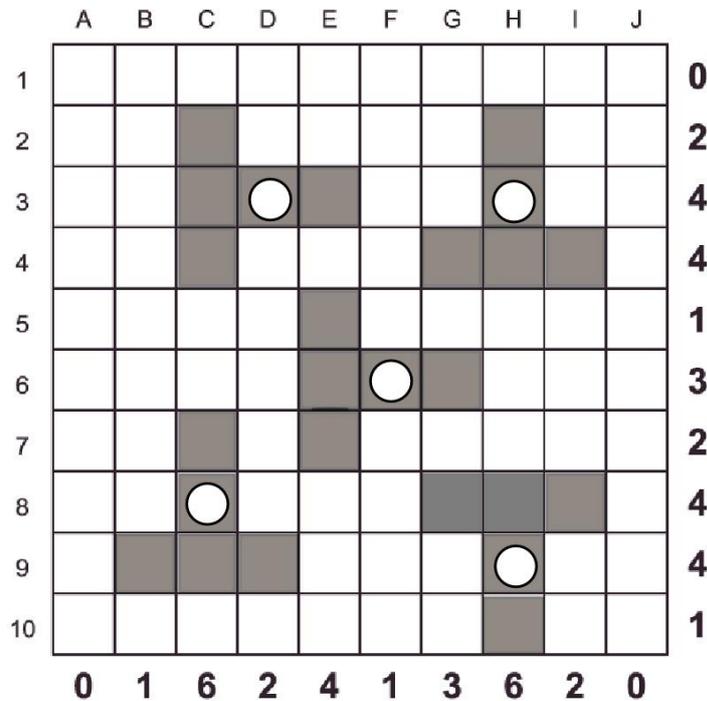


Kevin Knobel und seine Schwester Sina spielen "Schiffe versenken". Ihre Schiffe sind dabei nicht länglich, sondern wie die Zeichnung zeigt, T-förmig. Sie dürfen beim Plazieren in jede der vier möglichen Richtungen gedreht werden.

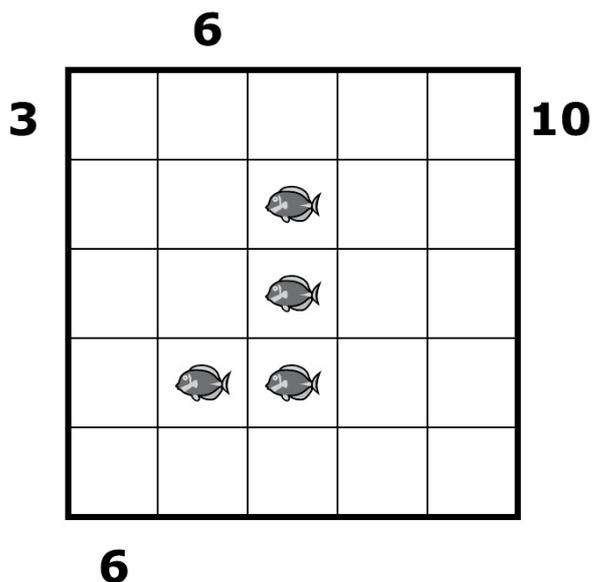
Kevin hat die Position seiner Schiffe nicht aufgezeichnet. Statt dessen hat er rechts und unter dem Spielfeld angegeben, wieviele Felder in der jeweiligen Zeile bzw. Spalte besetzt sind.

Wenn die Schiffe sich nicht berühren dürfen (auch nicht diagonal über Eck), kannst du dann herausfinden, wo Kevin seine fünf Schiffe versteckt hat?

Lösung 4.4



Aufgabe 4.5 Fisch am Haken



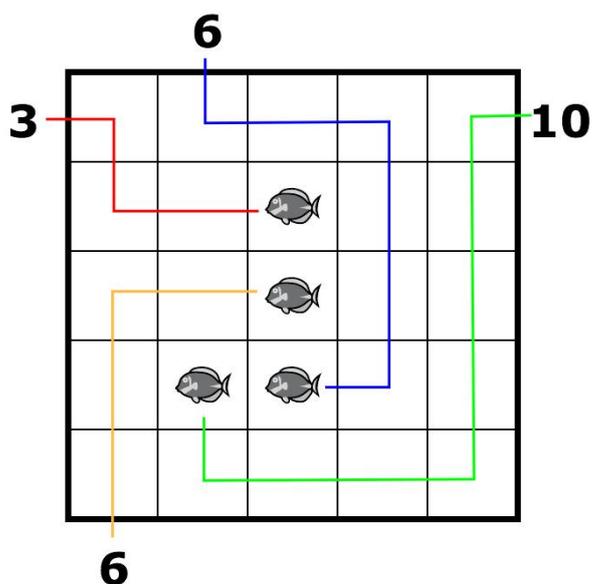
Die vier Zahlen repräsentieren die Positionen von vier Anglern. Jeder Angler hat einen Fisch am Haken. Dabei bedecken die Angelschnüre das gesamte Gitter, ohne sich zu kreuzen: Durch jede Gitterzelle führt eine Angelschnur, die dort entweder geradeaus weitergeht, oder rechtwinklig abknickt.

Die Zahlen repräsentieren die Längen der Angelschnüre (in Kästchenzahlen inklusive dem Fischkästchen). Allerdings flunkern Angler gerne ein wenig, weswegen die Zahlen alle entweder um 1 zu gross oder zu klein sind.

Kannst du herausfinden, wer welchen Fisch an der Angel hat?

Lösung 4.5

Die Lösung dieser Aufgabe war bei fast allen uns eingesandten Lösungen richtig.



Aufgabe 4.6 Zahlengitter

				334
				253
				613
				451
244	370	613	424	

Wie bei einem gewöhnlichen Gitterrätsel sollen in dieses Gitter die Zahlen von 1 bis 4 viermal so eingetragen werden, dass in jeder Zeile und Spalte jede Ziffer genau 1x vorkommt.

Danach sind an die Ziffern Nullen so anzuhängen, dass sich die jeweils angegebenen Zahlen als Zeilen- bzw. Spaltensummen ergeben.

Lösung 4.6

Die Lösung ist nicht schwer zu finden, wenn man sich für jedes Feld überlegt, welche Zahlen passen würden. Beispielsweise muss im Feld links oben eine 4 stehen, da man sonst nicht auf eine Zeile- und Spaltensumme mit Einerziffer 4 kommt, die gleichzeitig auch noch Hunderter- und Zehnerziffern enthält. So ergibt sich auch die 1 rechts unten und die 3 im rechten Feld der zweiten Zeile. Damit fallen für die anderen Felder schon einige an Möglichkeiten weg. Die letzte Spalte ergibt sich dann von selbst, da oben links ein Eintrag mit einer 2 stehen muss. Fährt man so fort, bleiben immer weniger Möglichkeiten für die anderen Felder übrig. Man kommt zu der Lösung:

4	300	10	20	334
10	40	200	3	253
200	10	3	400	613
30	20	400	1	451
244	370	613	424	