



Mathe–Star 2001/2002, 3.Runde

Sektion 3: Klasse 11-13

Aufgabe 3.1

Ein *Stammbruch* ist ein Bruch mit Zähler 1 und positivem Nenner. Zeigen Sie: Für jedes $n > 2$ kann man 1 als Summe von n verschiedenen Stammbrüchen schreiben.

Aufgabe 3.2

Die alte Spinne Tekla hat so viele Füße, dass sie sie schon nicht mehr zählen kann. Für jeden ihrer n Füße hat sie einen speziellen Schuh, der nur an diesen Fuß passt. Am Abend stellt sie ihre Schuhe im Kreis auf. Dabei achtet Sie darauf, dass sie – egal wie sie sich morgens in den Kreis stellt – zumindest vor einem Fuß schon den richtigen Schuh stehen hat.

Welche Bedingung muß an n gestellt werden, damit eine solche Anordnung möglich ist?

Aufgabe 3.3

Es seien p und q verschiedenen Primzahlen. Beweisen Sie:

$$\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3p}{q} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor = \frac{1}{2}(p-1)(q-1).$$

(Hier bezeichnet $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl nicht größer als x .)

Aufgabe 3.4

Jeder Punkt in der Ebene sei mit einer der drei Farben grün, blau oder rot gefärbt. Zeigen Sie, dass es ein Rechteck gibt, dessen vier Eckpunkte alle die gleiche Farbe haben.